

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

Диференциално смятане на функция на една променлива
с използване на Алгебрични компютърни системи

Боян Златанов



Пловдивски Университет “Паисий Хилендарски”

Факултет по Математика и информатика

04.04.2018

Предговор

Първа част на курса по Математически анализ включва теория на реалните числа; числови редици; функция на една променлива - граница на функция, непрекъснатост на функция, диференцируемост на функция; приложения на производните.

Предлаганият учебник е написан въз основа на четените от автора лекции по Математически анализ – Диференциално смятане на функция на една променлива пред студенти от специалностите „Математика“, „Приложна математика“, „Софтуерни технологии и дизайн“, „Информатика“, „Софтуерно инженерство“ във факултета по Математика и информатика, специалностите „Физика и математика“, „Инженерна физика“ във факултета по Физика и специалностите „Математика и информатика“, „Информационни технологии, математика и образователен мениджмънт“ във филиала в град Смолян на Пловдивския университет “Паисий Хилендарски“. Лекционните записки са част от учебните помагала по проекта BG051PO001-4.3.04-0064 „Пловдивски електронен университет (ПеУ): национален еталон за провеждане на качествено е-обучение в системата на висшето образование“. В интернет страницата на „Пловдивски електронен университет“ са включени също така тестове по всяка тема и файлове с кода на *Maple*, които илюстрират прилагането на компютър за решаване на задачи по Математически анализ.

Четири основни елемента присъстват в учебника: пълно излагане на основните резултати по Математически анализ – диференциално смятане на функция на една променлива; илюстрация на определенията и теоремите с примери и чертежи; използване на компютър за решаване на задачи; представяне на кратка биография на математиците, допринесли за всеки един от изучаваните резултати в курса.

При излагането на теорията сме се постарали да разгледаме всички най-съществени понятия и твърдения от Математическия анализ – диференциално смятане на функция на една променлива. Илюстрирали сме понятията и твърденията както с лесни примери, така и с по-сложни примери. Демонстрирали сме приложение на теоремите в задачи от други клонове на естествените и природните науки. Чертежите са изработени или на *Maple* или на *GeoGebra*. Динамичната среда на *GeoGebra* позволява да илюстрираме примерите, в които има динамика. Развитието на Алгебричните компютърни системи (ACS) позволява да се извършват сложни и трудоемки математически пресмятания с помощта на компютър. Ето защо в настоящите лекционни записки сме демонстрирали възможностите на ACS за решаване на задачи по математически анализ. Запознаваме студентите с вградените в ACS функции, които дават крайни резултати на поставените задачи по математически анализ. Дефинираме процедури в *Maple*, които следват стъпка по стъпка пресмятанията, които би трябвало да се извършат на ръка. Това ни позволи да включим сложни примери, за които не би имало време да бъдат разгледани в часовете по Математически анализ.

Доколкото е известно на автора първи елементи в използването на компютър при преподаване на реален анализ има в учебника на R. Wilson - „Much Ado about Calculus - A Modern Treatment with Applications Prepared for Use with the Computer“, където се използват езиците FORTRAN или BASIC и в учебника на В. Ильин, В. Садовничий, Бл. Сендов „Математический анализ - начальный курс“, където се използва езика ALGOL за

решаване на отделни задачи. Развитието на Алгебричните компютърни системи позволява да се разшири множеството от задачи, които могат да бъдат решавани и с помощта на компютър.

При създаването на Лекционния курс сме използвали основно четири учебника: М. Фихтенгольц „Курс дифференциального и интегрального исчисления в 3 тома“, В. Илин, В. Садовничи, Бл. Сендов „Математически анализ в 2 тома.“, П. Джаков, Р. Леви, Р. Малеев, Ст. Троянски „Дифференциално и интегрално смятане“ и Ст. Банах „Дифференциальное и интегральное исчисление“. Разработихме този лекционен курс, за да обогатим вече споменатите учебници с използването на ACS при изучаването на Математически анализ.

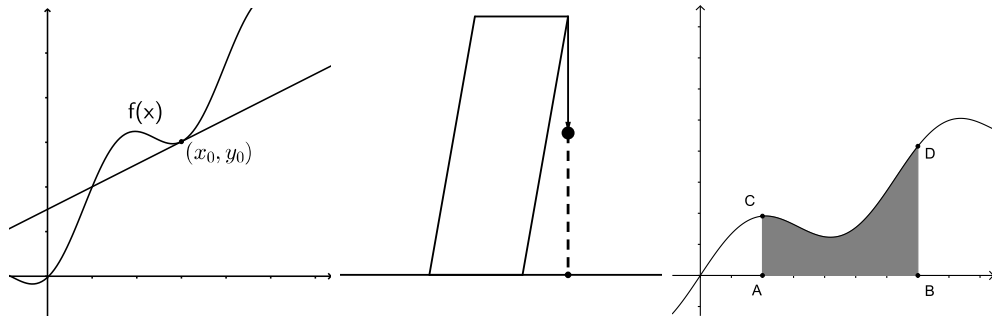
Съдържание

1	Реални числа	5
1.1	Рационални числа	5
1.2	Дефиниране на ирационалните числа	6
1.3	Реални числа	8
1.4	Аритметични действия с реални числа	12
1.5	Множества	15
2	Числови редици	17
2.1	Основни означения и дефиниции	17
2.2	Основни видове числови редици	25
2.3	Сходящи числови редици	26
2.4	Действия с числови редици	31
2.5	Неравенства и граници на редици	33
2.6	Монотонни редици	39
2.7	Подредици	42
2.8	Критерии за сходимост на редици	45
2.9	Безкрайно малки и безкрайно големи редици	47
2.10	Неопределени изрази	52
2.11	Определение на числото e	53
3	Функции	59
3.1	Основни понятия	59
3.2	Аналитично дефиниране на функция	61
3.3	Основни класове функции	63
3.4	Обратни функции	68
3.5	Съставна функция	71
4	Граница на функция	74
4.1	Определение за граница на функция по Хайне	74
4.2	Определение за граница на функция по Коши	78
4.3	Лява и дясна граница	82
4.4	Граница в безкрайността	84
4.5	Някои свойства на функции, които имат граница	88
4.6	Безкрайно малки и безкрайно големи функции	89
5	Непрекъснати функции	94
5.1	Аритметични действия с непрекъснати функции	97
5.2	Монотонност и непрекъснатост	98
5.3	Съставна функция от непрекъснати функции	101
5.4	Непрекъснатост на елементарните функции	102

5.5	Примери на прекъснати функции	103
5.6	Свойства на непрекъснатите функции	107
5.7	Приложение на непрекъснатостта за намиране на граници	115
5.8	Равномерна непрекъснатост	119
5.9	Отворени покрития	124
6	Производна на функция	130
6.1	Допирателна към крива	130
6.2	Дефиниция на производна	134
6.3	Основни теореми за производна на функция	137
6.4	Диференцируемост на функция	140
6.5	Производни на елементарните функции	143
6.6	Основни свойства на диференцируемите функции	145
7	Приложение на диференцирането	157
7.1	Критерий за константност	157
7.2	Критерий за монотонност	161
7.3	Доказване на неравенства	166
7.4	Правило на Лопитал	169
7.5	Производни от по-висок ред	181
7.6	Формула на Тейлор	187
7.7	Разлагане по формулата на Маклорен на някои елементарни функции	191
7.8	Пресмятане на граници с помощта на формулата на Тейлор	200
7.9	Локални екстремуми	202
7.10	Най-голяма и най-малка стойност на функция	217
7.11	Изпъкнали функции	225
7.12	Неравенство на Йенсен	239
7.13	Построяване на графика на функция	242

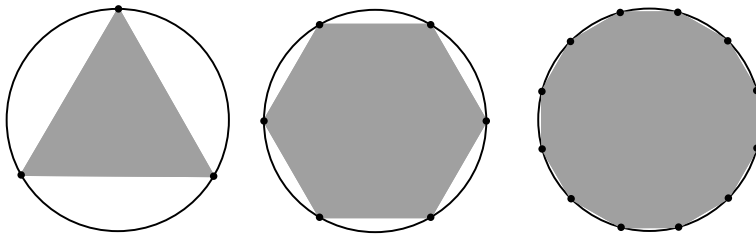
Въведение

По какво се различават алгебрата и реалният анализ? Може би най-лесният начин да опишем различието помежду им с една дума е, че алгебрата е „статична“, а реалният анализ е „динамичен“. В алгебрата решаваме уравнения за определена стойност на променливата „статично понятие“, а в реалния анализ се интересуваме как изменението на една от променливите влияе върху изменението на друга променлива „динамично понятие“. На



Фигура 1: Основни задачи от Математическия анализ

Фиг. 1 са дадени три задачи: да се намери допирателната към кривата в дадена точка, да се намери моментната скорост на падащо тяло и да се намери лицето на заштрихованата фигура. Трите задачи изглеждат различни, но тяхното решаване изисква едни и същи методи. Тези нови методи са открити едновременно и независимо един от друг от Нютон (1642–1727) и Лайбниц (1646–1716). Освен споменатите три задачи, реалният анализ дава



Фигура 2: Приближено пресмятане на лицето на кръг

апарат за решаване на много други задачи от различни сфери на науката и живота. До скоро се е приемало, че реалният анализ има приложение основно във физиката, но сега

вече учени, работещи в много други области на познанието откриват, че той е полезен апарат за изследване в тях.

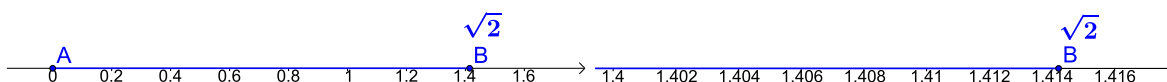
Реалният анализ е свързан тясно с понятието граница. Първите достигнали до нас сведения за използване на граница са от антична Гърция. Задачата, която е била интересна на учените тогава е да се намери лицето на кръга. Архимед (287–212 пр.н.е.) е забелязал, че ако вписваме последователно правилни многоъгълници в окръжност с радиус 1, то когато броят на страните им става все по-голям, лицата им ще стават все по-близки до лицето на кръга (Фиг. 2). По този начин Архимед достига до забележителното число π към което клонят лицата на вписаните правилни n -ъгълници в кръг с радиус 1.

Аналогично наблюдение е в сила и когато търсим обиколката на кръга.

1 Реални числа

Интуитивната представа за реално число е число, чиято стойност може да се представи като дължина на отсечка. Реалните числа включват в себе си естествените числа $(1, 2, 5, 10)$, целите числа $(1, -1, 2, -3, 7, -8)$, рационалните числа $(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{7}{5}, -\frac{3}{4})$, ирационалните числа, които се делят на алгебрични ирационални $(\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{2})$ числа и трансцендентни числа $(\pi, e, 2\pi, 2^\pi)$.

Всяко реално число може да се представи като отсечка от права, върху която е избрана дължината на единичната отсечка. С помощта на единичната отсечка и на нейни деления всяко число може да се представи като безкрайна десетична дроб (Фиг. 3).



Фигура 3: Представяне на $\sqrt{2}$ като десетична дроб

Аксиоматичното изграждане на теорията на реалните числа е един от най-значимите резултати на математиката през 19в. Съществуват множество конструктивни дефиниции на реалните числа. Ще споменем три от тях - сечения на Дедекинд, класове от еквивалентни редици на Коши, безкрайни десетични дроби.

1.1 Рационални числа

Множеството на естествените числа ще означаваме с \mathbb{N} , а множеството на целите числа ще означаваме с \mathbb{Z} .

Рационално число a наричаме число, което се представя във вида $\frac{m}{n}$, където $m, n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$. Числата $\frac{p \cdot m}{p \cdot n}$ и $\frac{m}{n}$, където $m, n, p \in \mathbb{Z}$ считаме за равни. Множеството на рационалните числа означаваме с \mathbb{Q} . Множеството на рационалните числа удовлетворява следните свойства:

Свойства на наредбата

1) За всеки две числа $a, b \in \mathbb{Q}$ е изпълнено точно едно от съотношенията:

$$a = b, \quad a > b, \quad b > a;$$

2) Ако $a > b$ и $b > c$, то следва че $a > c$;

3) Ако $a > b$, то съществува $c \in \mathbb{Q}$, така че $a > c$ и $c > b$.

Съотношението $<$ се дефинира чрез $>$. Казваме, че $a < b$, ако $b > a$.

Събиране и изваждане на рационални числа. За всеки две рационални числа a и b съществува единствено рационално число c , което наричаме сума на числата a и b и

означаваме с $a + b$. Добре известно е, че ако $a = \frac{m}{n}$ и $b = \frac{p}{q}$, то $c = \frac{m.q + n.p}{n.q}$.

Свойства на операцията събиране на рационални числа:

- 1) $a + b = b + a$;
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- 3) $a + 0 = a$;
- 4) За всяко $a \in \mathbb{Q}$ съществува число $-a \in \mathbb{Q}$, така че $a + (-a) = 0$.
Чрез числото $-a$ се дефинира разлика на две рационални числа $a - b = a + (-b)$;
- 5) Ако $a > b$, то $a + c > b + c$.

Умножение и деление на рационални числа. За всеки две рационални числа a и b съществува единствено рационално число c , което наричаме произведение на числата a и b и означаваме с ab . Добре известно е, че ако $a = \frac{m}{n}$ и $b = \frac{p}{q}$, то $c = \frac{m.p}{n.q}$.

Свойства на операцията умножение на рационални числа:

- 1) $ab = ba$;
- 2) $(ab)c = a(bc)$;
- 3) $a.1 = a$;
- 4) За всяко $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ съществува число $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$, така че $a.\frac{1}{a} = 1$.
Чрез числото $\frac{1}{a}$ се дефинира деление на две рационални числа $a/b = a.\frac{1}{b}$;
- 5) Ако $(a + b).c = a.c + b.c$;
- 6) Ако $a > b$ и $c > 0$, то $a.c > b.c$.

Аксиома на Архимед За всяко $a > 0$ съществува $n \in \mathbb{N}$, така че $n > a$.

Архимед е изказал горната аксиома геометрично: Нека са дадени две отсечки A и B . Можем да нанесем отсечката A толкова пъти, че сумата ѝ да надмине B .

1.2 Дефиниране на ирационалните числа

Нека първо да отбележим, че съществуват числа, които не са рационални. Например числото $\sqrt{2}$. Ако допуснем, че $\sqrt{2}$ е рационално число, то следва, че съществуват $p, q \in \mathbb{N}$, които нямат общи делители, така че $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. След повдигане на квадрат получаваме равенството $2.q^2 = p^2$. Следователно p се дели на 2, но тогава следва, че p^2 се дели на 4. Следователно q трябва да се дели на 2, което противоречи с избора на числата p, q да нямат общи делители.

Ще следваме теорията на Дедикенд за конструиране на ирационалните числа.

Определение 1.1 Наричаме непразните множества $A, A' \subset \mathbb{Q}$ сечение и го означаваме с $A|A'$, ако те удовлетворяват условията:

- 1) всяко $a \in \mathbb{Q}$ принадлежи на точно едно от множествата A и A' ;
- 2) всяко число $a \in A$ е по-малко от всяко число $a' \in A'$.

Множеството A наричаме долен клас за сечението $A|A'$, а множеството A' наричаме горен клас.

Пример 1.1 Нека да дефинираме множествата $A, A' \subset \mathbb{Q}$, така че $a \in A$, ако $a < 1$ и $a' \in A'$, ако $a' \geq 1$.

Лесно се вижда, че $A|A'$ е сечение и $1 \in A'$ е минимален елемент за множеството A' .

Ричард Дедекинд (1831 – 1916) е немски математик, който има съществен принос в теория на пръстените, алгебрична теория на числата и дефиниция на реалните числа. Дедекинд дава първото прецизно определение на безкрайно множество: множество, за което съществува взаимно еднозначно съответствие между множеството и негово подмножество.

Дедекин живее и работи основно в родния си град Braunschweig. Дедекинд учи първо в Collegium Carolinum, след това се мести в университета в Гьотинген. По това време Гаус все още преподава и Дедекинд е неговият последен ученик. Защищава докторат през 1852 върху Ойлерови интегрални.

В този период центърът на математиката в Германия е университетът в Берлин и Дедекинд отива там за две години. Заедно с Риман се хабилитират през 1854. Дедекинд работи съвместно с Дирихле, с когото стават добри приятели. Преподава в университетите в Гьотинген, Политехниката в Цюрих и в родния си град в Collegium Carolinum, вече преименуван на Technische Hochschule. През 1858, когато преподава в Цюрих, той достига до идеята за сеченията, които сега носят неговото име.

През 1900 Дедекинд се запознава с Кантор. Дедекинд е първият математик, който изразява възхищение от резултатите на Кантор за безкрайните множества. Дедекинд подкрепя изцяло Кантор в борбата му с Кронекер, който отказва да приеме трансфинитните числа на Кантор.



Фигура 4: Julius Wilhelm Richard Dedekind

Пример 1.2 Нека да дефинираме множествата $A, A' \subset \mathbb{Q}$, така че $a \in A$, ако $a \leq 1$ и $a' \in A'$, ако $a' > 1$.

Лесно се вижда, че $A|A'$ е сечение и $1 \in A$ е максимален елемент за множеството A .

Пример 1.3 Нека да дефинираме множествата $A, A' \subset \mathbb{Q}$, така че $a \in A$, ако $a^2 < 2$ и $a' \in A'$, ако $(a')^2 > 2$.

Лесно се вижда, че $A|A'$ е сечение и нито A има максимален елемент, нито A' има минимален елемент. Ще докажем, че A няма максимален елемент. Нека $a \in A$ е произволно.

Тогава $a^2 < 2$. Ще покажем, че съществува $n \in \mathbb{N}$, така че $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$. За всяко a съществува според Аксиомата на Архимед $n \in \mathbb{N}$, така че $n > \frac{2a+1}{2-a^2}$. Следователно

$$2 - a^2 > \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} > \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2},$$

което е еквивалентно на $\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$ и следователно $a < a + \frac{1}{n} \in A$.

Лесно се съобразява, че не може да има сечение $A|A'$, така че едновременно A да има максимален елемент a_0 и A' да има минимален елемент a'_0 . Ако допуснем, че това е възможно, то от свойство 3) на наредбата на рационалните числа следва, че съществува $a_0 < c < a'_0$. Числото не може да принадлежи на нито едно от множествата A , A' и следователно $A|A'$ не може да бъде сечение.

От казаното до тук следва, че са възможни следните три случая:

- 1) A няма максимален елемент и A' има минимален елемент;
- 2) A има максимален елемент и A' няма минимален елемент;
- 3) A няма максимален елемент и A' няма минимален елемент.

В случаите 1) и 2) казваме, че сечението $A|A'$ дефинира рационалното число, което е гранично за сечението. В случай 3) казваме, че сечението дефинира ирационално число. Без да се нарушава общността на разглежданията ще считаме, че сечението, което определя рационалното число r е такова, че $r \in A'$.

1.3 Реални числа

Множеството от всички рационални и ирационални числа наричаме реални числа.

Нека α, β са ирационални числа, дефинирани със сеченията $A|A'$ и $B|B'$. Казваме, че α и β са равни, ако сеченията им са равни, т.е. $A = B$.

Знаем, кога две рационални числа удовлетворяват $a > b$. Нека α е ирационално число, дефинирано със сечението $A|A'$ и $r \in \mathbb{Q}$. Ирационалното число α и рационалното число r удовлетворяват неравенството $a > r$, когато $a \in A'$. Нека α, β са ирационални числа, дефинирани със сеченията $A|A'$ и $B|B'$. Казваме, че α е по-голямо от β , ако множеството A е по-голямо (съдържа) множеството B .

Трябва да покажем, че дефинирани по този начин реалните числа удовлетворяват всички свойства на рационалните числа.

Свойства на наредбата

- 1) За всеки две числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ е изпълнено точно едно от съотношенията:

$$\alpha = \beta, \alpha > \beta, \beta > \alpha$$

Наистина множествата A и B или съвпадат или едното от множествата съдържа изцяло другото множество и следователно е изпълнено едно от $\alpha = \beta, \alpha > \beta, \beta > \alpha$.

2) Ако $\alpha > \beta$ и $\beta > \gamma$, то $\alpha > \gamma$

Нека числата α , β и γ се определят от сеченията $A|A'$, $B|B'$ и $C|C'$. Следователно $A \supset B \supset C$ и тогава $\alpha > \gamma$.

Лема 1.1 *За всеки две реални числа $\alpha > \beta$ съществува рационално число r , така че $\alpha > r > \beta$.*

Доказателство: От $\alpha > \beta$ следва, че $A \supset B$. Съществува $r \in \mathbb{Q} \cap A$, такава че $r \notin B$. Следователно $r \in B'$, т.е. $\alpha > r \geq \beta$. Понеже множеството A няма най-голям елемент, то ако е необходимо, можем да увеличим малко r , така че $\alpha > r > \beta$. \square

Лема 1.2 *Нека α , β са две реални числа. Ако за всяко реално число $\varepsilon > 0$ съществуват рационални числа r и r' , така че да са изпълнени неравенствата*

$$(1) \quad r' \geq \alpha \geq r, \quad r' \geq \beta \geq r, \quad r' - r < \varepsilon,$$

то $\alpha = \beta$.

Доказателство: Нека да допуснем противното. Без загуба на общността на разглежданията можем да приемем, че $\alpha > \beta$. Според Лема 1.1 съществуват $p, p' \in \mathbb{Q}$, такива че $\alpha > p' > p > \beta$. Тогава за всеки две рационални числа $r > r'$, които удовлетворяват (1) (т.е. числата α и β се съдържат между r и r') ще бъдат изпълнени неравенствата $r' > p' > p > r$, т.е. $r' - r > p' - p > 0$. Следователно разликата $r' - r$ не може да бъде направена по-малка от $\varepsilon = r' - r$. Това е противоречие с условието на Лемата и следователно допускането, че $\alpha \neq \beta$ не е вярно. \square

Ще покажем, че ако в множеството на реалните числа разглеждаме сечения, то тези сечения няма да генерират нов вид числа, както е при сеченията в множеството на рационалните числа.

Определение 1.2 *Наричаме непразните множества $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \subset \mathbb{R}$ сечение и го означаваме с $\mathbf{A}|\mathbf{A}'$, ако те удовлетворяват условията:*

- 1) *всяко $\alpha \in \mathbb{R}$ принадлежи на точно едно от множествата \mathbf{A} и \mathbf{A}' ;*
- 2) *всяко число $\alpha \in \mathbf{A}$ е по-малко от всяко число $\alpha' \in \mathbf{A}'$.*

Множеството \mathbf{A} наричаме долен клас за сечението $\mathbf{A}|\mathbf{A}'$, а множеството \mathbf{A}' наричаме горен клас.

Теорема 1.1 *За всяко сечение $\mathbf{A}|\mathbf{A}'$ в областта на реалните числа съществува реално число β , което генерира това сечение. Това число е или най-голямо за долния клас или е най-малко за горния клас.*

Това свойство на реалните числа се нарича пълнота или непрекъснатост на реалните числа.

Доказателство: Нека означим $A = \mathbf{A} \cap \mathbb{Q}$ и $A' = \mathbf{A}' \cap \mathbb{Q}$. Множествата A и A' образуват сечение в множеството на рационалните числа. Следователно сечението $A|A'$ генерира реално число β . Следователно β принадлежи на едно от множествата \mathbf{A} или \mathbf{A}' . Без да се намалява общността на разглежданията можем да приемем, че $\beta \in \mathbf{A}$. Ще покажем, че в този случай β е най-големият елемент на множеството \mathbf{A} . Да допуснем противното, т.е. съществува $\beta_0 \in \mathbf{A}$, такова че $\beta_0 > \beta$. Според Лема 1.1 съществува $r \in \mathbb{Q}$, така че $\beta_0 > r > \beta$. Следователно $r \in \mathbf{A} \supset A$, което е противоречие, понеже β е генерирано от сечението $A|A'$ и не е възможно да съществува $r \in A$, така че $r > \beta$. Така стигнахме до противоречие с допускането, че β не е най-големият елемент за множеството \mathbf{A} .

Аналогично се разсъждава, ако допуснем, че $\beta \in \mathbf{A}'$.

Аналогично на доказателството за сечения в множеството на реалните числа се доказва, че не е възможно едновременно да съществува най-голям елемент в \mathbf{A} и най-малък елемент \mathbf{A}' . \square

Определение 1.3 Нека $X \subset \mathbb{R}$.

- 1) Ако съществува $M \in \mathbb{R}$, така че за всяко $x \in X$ е изпълнено $x \leq M$ казваме, че множеството X е ограничено отгоре и M наричаме горна граница за множеството X ;
- 2) Ако съществува $M \in \mathbb{R}$, така че за всяко $x \in X$ е изпълнено $x \geq M$ казваме, че множеството X е ограничено отдолу и M наричаме долна граница за множеството X .

Пример 1.4 Множеството от естествените числа $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ е ограничено отдолу. Например $n \geq 1$, за всяко $n \in \mathbb{N}$. Също така $n \geq 0$, за всяко $n \in \mathbb{N}$. Множеството от естествените числа не е ограничено отгоре.

Пример 1.5 Множеството $X = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ е ограничено отдолу и отгоре. Например $x \geq 0$, за всяко $x \in X$. Също така $x \leq 1$, за всяко $x \in X$.

Ако едно множество не е ограничено отгоре (отдолу) приемаме, че неговата горна (долна) граница е $+\infty$ ($-\infty$).

Ако едно множество X е ограничено отгоре (отдолу), тогава горните (долните) граници на X са безброй много. Например, ако M е горна (долна) граница, то всички числа $a > M$ ($a < M$) са горна (долна) граница.

Определение 1.4 Нека $X \subset \mathbb{R}$.

- 1) Нека X е ограничено отгоре множество. Точна горна граница на X наричаме число a , което е горна граница и всяко $b < a$ не е горна граница за X ;
- 2) Нека X е ограничено отдолу множество. Точна долна граница на X наричаме число a , което е долна граница и всяко $b > a$ не е долна граница за X .

Според Определение 1.4 точната горна (долна) граница е най-малката (най-голямата) от всичките горни (долни) граници.

Пример 1.6 Множеството от естествените числа $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ има точна долна граница равна на 1.

Пример 1.7 Множеството $X = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$ има точна долна граница равна на 0 и точна горна граница равна на 1.

Точната долна или горна граници могат както да принадлежат на множеството, така и да не принадлежат.

Теорема 1.2 Нека множеството $X \subset \mathbb{R}$ е ограничено отгоре (отдолу). Тогава X има точна горна (долна) граница.

Доказателство: 1) Нека да съществува най-голямо число в множеството X , т.е. съществува $\alpha \in X$, така че $x \leq \alpha$ за всяко $x \in X$. Следователно α е горна граница за множеството X . От друга страна $\alpha \in X$ и следователно за всяка горна граница M на множеството X е в сила неравенството $\alpha < M$. Така получаваме, че α е точната горна граница за множеството X .

2) Нека в множеството X не съществува максимален елемент. Ще конструираме сечение $\mathbf{A}|\mathbf{A}'$, което да удовлетворява условията: \mathbf{A}' съдържа всичките горни граници на X , а множеството \mathbf{A} съдържа всички останали числа. Следователно $X \subseteq \mathbf{A}$. Множествата \mathbf{A} и \mathbf{A}' не са празни и образуват сечение в множеството на реалните числа. Според Теорема 1.1 съществува $\alpha \in \mathbb{R}$, което генерира сечението $\mathbf{A}|\mathbf{A}'$. За всяко $x \in \mathbf{A}$ е в сила $x \leq \alpha$. Следователно α е горна граница за X и тогава $\alpha \in \mathbf{A}'$. По дефиниция α генерира сечението $\mathbf{A}|\mathbf{A}'$ и следователно принадлежи точно на едно от множествата \mathbf{A} или \mathbf{A}' . Следователно то може да бъде само най-малко в множеството \mathbf{A}' . От всичко това следва, че α е точна горна граница за множеството X .

Аналогично се доказва, че ако множеството X е ограничено отдолу, то то има точна долна граница. \square

Следствие 1.1 Нека множеството X има точна горна (долна) граница числото M (m). Тогава е изпълнено:

- 1) За всяко $x \in X$ е в сила неравенството $x \leq M$ ($x \geq m$);
- 2) За всяко $\alpha < M$ ($\alpha > m$) съществува $x \in X$, така че $\alpha < x$ ($\alpha > x$).

Точната горна граница на множеството X се означава с $M = \sup\{X\}$. Точната долна граница на множеството X се означава с $m = \inf\{X\}$.

Твърдение 1.1 Ако за всяко $x \in X$ е изпълнено неравенството $x \leq M$ ($x \geq m$), то е изпълнено и неравенството $\sup\{X\} \leq M$ ($\inf\{X\} \geq m$).

Доказателство: Наистина, по условие M е горна граница за X . Следователно най-малката от всички горни граници $\sup\{X\}$ трябва да не надминава M . \square

Ще приемем, че ако множеството X не е ограничено отгоре (отдолу), то $\sup\{X\} = +\infty$ ($\inf\{X\} = -\infty$).

1.4 Аритметични действия с реални числа

Нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Сума на числата $\alpha + \beta$ наричаме числото γ , което удовлетворява условието: за всеки четири рационални числа a, a', b, b' , свързани с неравенствата $a < \alpha < a', b < \beta < b'$ са в сила неравенствата $a + b < \gamma < a' + b'$.

Трябва да докажем, че така дефинираното число γ съществува и е единствено.

Съществуване: Нека разгледаме множеството $X = \{a + b : a < \alpha, b < \beta\}$. Множеството X е ограничено отгоре (например $x \leq a' + b'$). Следователно съществува $\sup\{X\}$. Нека да положим $\gamma = \sup\{X\}$. По дефиниция са изпълнени неравенствата $a + b \leq \gamma \leq a' + b'$ за всеки четири рационални числа a, a', b, b' , свързани с неравенствата $a < \alpha < a', b < \beta < b'$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Да изберем a, a', b, b' , такива че $a' - a < \varepsilon/2$ и $b' - b < \varepsilon/2$. Можем да приемем, че числата a' и b' са по-малки от някакви две фиксирани числа a'_0 и b'_0 съответно.

От неравенството $a' + b' - (a + b) = (a' - a) + (b' - b) < \varepsilon$ и Лема 1.2 следва че числото γ е единствено.

Така дефинираната сума на реални числа удовлетворява свойствата на операцията събиране на рационални числа:

- 1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
- 2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
- 3) $\alpha + 0 = \alpha$;
- 4) За всяко $\alpha \in \mathbb{R}$ съществува число $-\alpha \in \mathbb{R}$, така че $\alpha + (-\alpha) = 0$.
Чрез числото $-\alpha$ се дефинира разлика на две реални числа $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$;
- 5) Ако $\alpha > \beta$, то $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Произведение на числата $\alpha.\beta$ наричаме числото γ , което удовлетворява условието: за всеки четири рационални числа a, a', b, b' , свързани с неравенствата $a < \alpha < a', b < \beta < b'$ са в сила неравенствата $a.b < \gamma < a'.b'$.

Трябва да докажем, че така дефинираното число γ съществува и е единствено.

Съществуване: Нека разгледаме множеството $X = \{a.b : a < \alpha, b < \beta\}$. Множеството X е ограничено отгоре (например $x \leq a'.b'$). Следователно съществува $\sup\{X\}$. Нека да положим $\gamma = \sup\{X\}$. По дефиниция са изпълнени неравенствата $a.b \leq \gamma \leq a'.b'$ за всеки четири рационални числа a, a', b, b' , свързани с неравенствата $a < \alpha < a', b < \beta < b'$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Да изберем a, a', b, b' , такива че $a' - a < \varepsilon$ и $b' - b < \varepsilon$. Можем да приемем, че числата a' и b' са по-малки от някакви две фиксирани числа a'_0 и b'_0 съответно. От неравенството $a'.b' - (a.b) = a'.(b' - b) + b.(a' - a) < (a'_0 + b'_0).\varepsilon$ и Лема 1.2 следва че числото γ е единствено, защото $(a'_0 + b'_0).\varepsilon$ можем да го направим произволно малко.

Така дефинираното умножение на реални числа удовлетворява свойствата на операцията умножение на рационални числа:

- 1) $\alpha\beta = \beta\alpha$;
- 2) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$;

3) $\alpha.1 = \alpha$;

4) За всяко $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ съществува число $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}$, така че $\alpha.\frac{1}{\alpha} = 1$.

Чрез числото $\frac{1}{\alpha}$ се дефинира деление на две рационални числа $\alpha/\beta = \alpha.\frac{1}{\beta}$;

5) Ако $(\alpha + \beta).\gamma = \alpha.\gamma + \beta.\gamma$;

6) Ако $\alpha > \beta$ и $\gamma > 0$, то $\alpha.\gamma > \beta.\gamma$.

За всяко $\alpha \in \mathbb{R}$ съществува $n \in \mathbb{N}$, така че $n > \alpha$.

Наистина, от $\alpha \in \mathbb{R}$ следва съществуване на сечение $A|A'$, което определя числото α . Съществува $p \in A'$. От $p \in \mathbb{Q}$ и аксиомата на Архимед следва, че съществува $n \in \mathbb{N}$, така че $\alpha < p < n$.

Неравенството $|\alpha| < \beta$ е еквивалентно на $-\beta < \alpha < \beta$. За всеки две реални числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ са изпълнени неравенствата $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ и $|\alpha - \beta| \geq ||\alpha| - |\beta||$.

Ще дефинираме $\sqrt[n]{\alpha}$, където $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Ще се ограничим само до случая, $\alpha > 0$ и $\sqrt[n]{\alpha} > 0$. По дефиниция $\sqrt[n]{\alpha}$ е равно на γ , такава че $\gamma^n = \alpha$.

Единствеността на γ следва от факта, че ако $\gamma > \gamma_0$, то $\gamma^n > \gamma_0^n$. Ако съществува рационално число $p \in \mathbb{Q}$, така че $p^n = \alpha$, то $\sqrt[n]{\alpha} = p$. Нека не съществува рационално число с това свойство. Ще конструираме сечение $A|A'$ в множеството на рационалните числа. Нека $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^n < \alpha\}$, а $A' = \{x \in \mathbb{Q} : x^n > \alpha\}$. Множествата A и A' не са празни. Например съществува $m \in \mathbb{N}$, такава че $\frac{1}{m} < \alpha < m$ и следователно $\frac{1}{m^n} < \alpha < m^n$. Така получаваме, че $\frac{1}{m} \in A$ и $m \in A'$. Нека γ е реалното число, което генерира сечението $A|A'$. Ще докажем, че $\gamma^n = \alpha$. Разглеждаме γ^n като произведение на n -пъти γ . Тогава за всеки $x \in A$ и $y \in A'$ са изпълнени неравенствата $x^n < \gamma^n < y^n$. От $x \in A$ и $y \in A'$ следва, че $x^n < \alpha < y^n$. Разликата $y - x$ може да бъде направена по-малка от всяко отнапред избрано число. Можем да приемем, че избираме y да бъде по-малко от някое фиксирано число y_0 и следователно $x < y < y_0$. Тогава от неравенството

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + x.y^{n-2} + \dots + x^{n-1}) < \varepsilon.ny_0^{n-1}$$

и Лема 1.2 следва, че $\gamma^n = \alpha$.

По аналогичен начин със сечения се доказват равенствата: $\alpha^p.\alpha^q = \alpha^{p+q}$, $\frac{\alpha^p}{\alpha^q} = \alpha^{p-q}$, $(\alpha^p)^q = \alpha^{p.q}$, $(\alpha.\beta)^p = \alpha^p.\beta^p$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^p = \frac{\alpha^p}{\beta^p}$ за всеки $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $p, q \in \mathbb{Q}$.

Остава да дефинираме α^β за произволни $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Числото α^β наричаме числото γ , което удовлетворява неравенствата $\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}$, за всеки $b < \beta < b'$.

Множеството $\{\alpha^b : b < \beta\}$ е ограничено отгоре и следователно съществува $\sup\{\alpha^b : b < \beta\}$. Нека да положим $\gamma = \sup\{\alpha^b : b < \beta\}$. По дефиниция $\alpha^b \leq \gamma \leq \alpha^{b'}$. Знакът равенство може да бъде премахнат, защото ако за някое b има равенство, то съществува $b < c < \beta$ и следователно ще трябва да бъде изпълнено $\gamma = \alpha^b < \alpha^c$, което е противоречие. Следователно е изпълнено $\alpha^b < \gamma < \alpha^{b'}$.

За доказателството на единствеността ще използваме неравенството на Бернули: за всяко $\gamma > 1$ е в сила неравенството

$$(2) \quad \gamma^n > 1 + n(\gamma - 1).$$

Нека да положим $\gamma = \alpha^{1/n}$ в (2). Получаваме

$$\alpha^{1/n} - 1 < \frac{\alpha - 1}{n}.$$

Нека да изберем b, b' , така че $b' - b < 1/n$. От $b < \beta$, следва че съществува $b_0 \in \mathbb{N}$, така че $b < \beta < b_0$. Тогава

$$\alpha^{b'} - \alpha^b = \alpha^b(\alpha^{b'-b} - 1) < \alpha^b(\alpha^{1/n} - 1) < \alpha^b \frac{\alpha - 1}{n}.$$

За всяко $\varepsilon > 0$ избираме $n \in \mathbb{N}$, така че $n > \alpha^{b_0} \frac{\alpha - 1}{\varepsilon}$ и според Лема 1.2 числото γ е единствено.

С аналогични разсъждения се доказват равенствата:

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}, \quad \frac{\alpha^\beta}{\alpha^\gamma} = \alpha^{\beta-\gamma}, \quad (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}, \quad (\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\gamma = \frac{\alpha^\gamma}{\beta^\gamma} \text{ за всеки } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Аналогично с помощта на сечения се дефинира $\log_\alpha(\beta)$.

Якоб Бернули (Jacob Bernoulli 1655 – 1705) е един от няколкото известни математици от фамилията Бернули. Той защитава математическия анализ на Лайбниц в споровете между Нютон и Лайбниц. Добре известен е с многобройните си приноси в математическия анализ заедно с брат си Йохан. Те двамата се считат за основоположниците на вариационното смятане. Най-известният резултат на Бернули е свързан с вероятностите - закона за големите числа.

Якоб Бернули е роден в Базел и първоначално започва да учи теология, следвайки волята на баща си. Паралелно с теологията, той учи и математика и астрономия. Пътува из Европа от 1676 до 1682 и се запознава с последните открития в областта на математиката. Пътуванията из Европа създават добри приятелства на Бернули с много водещи математици. Създава погрешна теория за кометите. През 1683 се връща в Базел и става преподавател в Университета в Базел.

Става професор в университета в Базел през 1687 и остава на тази позиция до края на живота си. Заедно с брат си започва да изучава математическия анализ, представен от Лайбниц. Трябва да обърнем внимание, че публикациите по математически анализ на Лайбниц са били трудно разбираеми за съвременниците му и братята Бернули са първите, които се опитват да ги разберат и да ги прилагат.

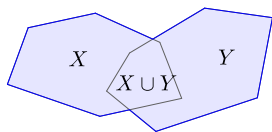
Якоб Бернули публикува резултати в областта на числовите редове. Решава проблема за изохроната, като свежда задачата до решаване на обикновено диференциално уравнение, което



Фигура 5: Jacob Bernoulli

решава чрез известния в момента метод на отделящите променливи. Друго диференциално уравнение носи неговото име. Той се занимава със задачата за подвижен мост. Бернулии пръв предлага наименованието интеграл през 1690, което идва от *integro* - възстановявам, превеждам в предишно състояние. Якоб Бернули открива константата e , когато се занимава със сложна лихва.

1.5 Множества



Фигура 6: Обединение на множества

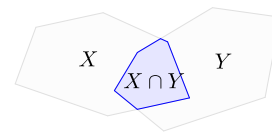
Понятието множество е първично в математиката и не може да се определи посредством други понятия, без използване на синоними, като „свкупност“ или „група елементи“. Използваме така наречената „наивна теория на множествата“, която се основава на интуитивното разбиране на понятието множество като свкупност от обекти, които наричаме елементи на разглежданото множество. В курса по математически анализ работим с обекти, които са точки от реалната права, равнина или n -мерно координатно пространство и като синоним на елемент ще използваме

точка. Означаваме множествата с главни букви, а техните елементи с малки букви. Нека X е множество и x е негов елемент. Записваме $x \in X$ и четем „ x принадлежи на X “. Записът $x \notin X$ означава, че x не принадлежи на X . Най-простите множества се състоят от краен брой елементи. Например $A = \{a, b, c, d\}$ означава, че множеството се състои от елементите a , b , c и d .

Определение 1.5 Казваме, че множеството Y е подмножество на X и записваме $Y \subseteq X$, ако всеки елемент на Y е и елемент на X . Не изключваме случая, когато X и Y се състоят от едни и същи елементи. Ако съществува поне един елемент $x \in X$, такъв че $x \notin Y$, тогава записваме $Y \subset X$ и казваме, че Y е нетривиално подмножество на X .

Обикновено подмножествата на дадено множество X се описват със задаване на свойство, което елементите на подмножеството удовлетворяват. Множеството на естествените числа $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ означаваме с \mathbb{N} . Множеството на четните числа можем да зададем, като подмножество на \mathbb{N} : $N_2 = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ се дели на } 2\}$. Множеството от степените на 2 – $\{2, 4, 8, 16, \dots, 2^n, \dots\}$ можем да зададем като подмножество на \mathbb{N} : $X = \{x \in \mathbb{N} : x = 2^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Ще използваме три основни операции с множества:



Фигура 7: Сечение на множества

Определение 1.6 (Обединение на множества) Нека X и Y са две множества. Обединение на множествата X и Y наричаме множеството Z , което се състои от елементите на X и Y (Фиг. 6), т.е. $z \in Z$, ако е изпълнено поне едно от условията $z \in X$ или $z \in Y$. Обединението означаваме с $Z = A \cup B$.

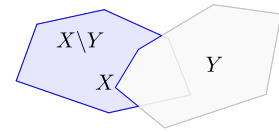
Определение 1.7 (Сечение на множества) Нека X и Y са две множества. Сечение на множествата X и Y наричаме множеството Z , което се състои от елементите, които принадлежат едновременно и на X и на Y (Фиг. 7), т.е. $z \in Z$, ако са изпълнени едновременно условията $z \in X$ и $z \in Y$. Сечението означаваме с $Z = X \cap Y$.

Определение 1.8 (Разлика на множества) Нека X и Y са две множества. Разлика на множествата X и Y наричаме множеството Z , което се състои от елементите, които принадлежат на X и не принадлежат на Y (Фиг. 8), т.е. $z \in Z$, ако са изпълнени едновременно условията $z \in X$ и $z \notin Y$. Разликата означаваме с $Z = X \setminus Y$.

Основна роля ще играят специални подмножества на реалните числа, които наричаме интервали.

Нека $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Затворен интервал с краища a и b наричаме множеството $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. Отворен интервал с краища a и b наричаме множеството $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Полуотворен или полузатворен интервал с краища a и b наричаме множествата $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ и $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$. Възможно е едно от числата или и двете да бъдат безкрайност: Тогава получаваме безкрайни интервали. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$; $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$; $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$; $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$; $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.



Фигура 8: Разлика на множества

2 Числови редици

2.1 Основни означения и дефиниции

Ако по някакво правило на всяко естествено число съпоставим реално число, казваме че сме задали числова редица.

Пример 2.1 Нека на числото 1 съпоставим 1, на числото 2 съпоставим $1/2$, на числото 3 съпоставим $1/3$ и т.н., на числото $n \in \mathbb{N}$ съпоставим $1/n$. Получаваме числовата редица

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Числото, съответстващо на 1 наричаме първи член на редицата, числото, съответстващо на 2 наричаме втори член на редицата и т.н. числото, съответстващо на n наричаме n -ти член на редицата.

Членовете на редицата ще означаваме по следния начин. Нека сме избрали буквата a . Първият член означаваме с a_1 , вторият означаваме с a_2 и т.н. Общият член на редицата означаваме с a_n . Вместо $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \dots$ за компактност на записва използваме означението $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Нека отбележим, че ако a_n е n -тият член на редицата, то a_{n+1} е следващият го, а a_{n-1} е предхождащият го член.

С помощта на командата *seq* в *Maple* могат да се изпишат първите членове на редица, която е дефинирана чрез формула. Командата *seq* може да се използва по няколко начина. *seq(f, i = m..n, step)* или *seq(f, i ∈ X)*. Параметри за командата *seq* са f – произволен израз, i – индекс, който обхожда числата от m до n , X – израз или множество на което принадлежи i , *step* числова стойност, която задава стъпката с която се изменя i .

Всяка команда в *Maple* трябва да завършва или с точка и запетая или с двоеточие. Ако използваме точка и запетая, то на екрана ще се изведе резултата от пресмятанията, ако използваме двоеточие, то ще се извършат сметките, но няма да бъдат визуализирани на екрана.

Ще използваме червен цвят за изписване на командите, които се въвеждат в *Maple* и син цвят за резултата, който дава софтуера.

С командата

seq ($\frac{1}{i}, i = 1..10$);

изписваме първите 10 члена на редицата от Пример 2.1

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$

С командата

seq($\frac{1}{i}, i = 1..10, 2$);

изписваме елементите на редицата от Пример 2.1 със стъпка 2

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$

Нека дефинираме множествата

$X := [seq(i^2, i = 1..6)]; Y = [1, 3, 6, 12, 13, 24]$

$[1, 4, 9, 16, 25, 36]$

$[1, 3, 6, 12, 13, 24]$

С командата

$seq(\frac{1}{i}, i \in X); seq(\frac{1}{i}, i \in Y);$

изписваме елементите на редицата от Пример 2.1 за $i \in X$

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}$

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{24}$

Със следващите примери ще покажем различни начини за дефиниране на числови редици.

Пример 2.2 (Задаване чрез формула) Нека $a_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

Получаваме числовата редица $2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots$

$seq(2 \cdot n, n = 1..20);$

$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40$

Пример 2.3 (Рекурентна връзка) Нека $a_1 = 0$ и $a_n = 3a_{n-1} + 2$, $n \geq 2$.

Получаваме числовата редица $0, 2, 8, 26, \dots$

Можем да дефинираме процедура в *Maple*, която да има параметри и да извикваме тази процедура, която да извършва дефинираните действия. Процедурите могат да се използват и при рекурентни действия. Дефинираме процедурата f , която да пресмята редицата от Пример 2.3. Процедурата f зависи от един параметър a . Проверяваме, ако $a > 1$, то пресмятаме $f(a)$ по формулата $f(a) = 3f(a - 1) + 2$. Ако $a = 1$ то $f(1) = 0$:

$f := proc(a)$

$if 1 < a then 3 \cdot thisproc(a - 1) + 2$

$else 0$

$end if$

$end proc;$

$seq(f(i), i = 1..10); f(101);$

$0, 2, 8, 26, 80, 242, 728, 2186, 6560, 19682$

$515377520732011331036461129765621272702107522000$

Пример 2.4 (Рекурентна връзка) Нека $a_1 = 1$ и $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$, $n \geq 2$.

Получаваме числовата редица $1, 1, 2, 4, 8, 16, \dots$

При дефинирането на следващата процедура използваме цикъл. Синтаксисът при дефиниране на цикъл в *Maple* е

for k from a to b do

команди

end do

k е променливата, a е началната стойност на k , b е крайната стойност на k , „команди“ е произволна последователност от команди, които се изпълняват при всяко $k \in [a, b]$.

g := proc(a)

local s, k;

s := 0;

if 2 < a then

for k from 1 to a - 1 do

s := s + thisproc(k)

end do

elif 2 = a then 1

else 1

end if

end proc;

seq(g(i), i = 1..20); g(112);

1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144.
1298074214633706907132624082305024

Забелязваме, че времето необходимо за пресмятане на $g(112)$ е много. Това се случва, защото за да пресметне $g(112)$, *Maple* вижда, че $g(112) = g(111) + g(110) + \dots + g(1)$. Софтуерът започва да пресмята $g(111)$, което е равно на $g(110) + g(109) + \dots + g(1)$ и т.н. Пресмятайки веднъж $g(1)$ се връща обратно и намира сумата $g(111) = g(110) + g(109) + \dots + g(1)$. Проблемът е, че когато започне да пресмята $g(110)$, цялата процедура се повтаря, понеже всички пресмятания до момента се изтриват. Ако добавим параметъра **option remember** тогава всички пресметнати до момента стойности $g(k)$ се запазват за повторно използване, ако се окаже необходимо.

g := proc(a)

option remember;

local s, k;

s := 0;

if 2 < a then

for k from 1 to a - 1 do

s := s + thisproc(k)

end do

elif 2 = a then 1

else 1

end if

end proc;

g(112);

1298074214633706907132624082305024

За пресмятания на реални числа е по-удобно да използваме тяхното представяне като десетична дроб, вместо като сечение. Нека α е реално число, което нито е цяло, нито крайна десетична дроб. То определя сечение $A|A'$. Съществуват $M \in A$ и $M' \in A'$. Ако е необходимо, можем да добавим достатъчен брой единици, така че да се получи число C_0 , удовлетворяващо $C_0 < \alpha < C_0 + 1$. Разделяме отсечката $C_0, C_0 + 1$ на 10 равни части: $C_0, C_0.1, C_0.2, \dots, C_0.9, C_0 + 1$. Тогава α принадлежи точно на една от получените отсечки с дължина $1/10$. Нека това е отсечката $C_0.c_1, C_0.c_1 + \frac{1}{10}$. Тази отсечка я делим да 10 равни части: $C_0.c_1, C_0.c_11, C_0.c_12, \dots, C_0.c_19, C_0.c_1 + \frac{1}{10}$. Тогава α принадлежи точно на една от получените отсечки с дължина $1/100$. Нека това е отсечката $C_0.c_1c_2, C_0.c_1c_2 + \frac{1}{100}$. Тази отсечка я делим да 10 равни части: $C_0.c_1c_2, C_0.c_1c_21, C_0.c_1c_22, \dots, C_0.c_1c_29, C_0.c_1c_2 + \frac{1}{100}$. Тогава α принадлежи точно на една от получените отсечки с дължина $1/1000$. Нека това е отсечката $C_0.c_1c_2c_3, C_0.c_1c_2c_3 + \frac{1}{1000}$. Продължаваме по този начин и на n -тата стъпка ще получим, че $C_0.c_1c_2 \dots c_n < \alpha < C_0.c_1c_2 \dots c_n + \frac{1}{10^n}$. По този начин намираме приближение на числото α с десетични дроби. Можем да кажем, че получената безкрайна десетична дроб $C_0.c_1c_2 \dots c_n \dots$ е представяне на реалното число α .

Пример 2.5 (*Чрез описание*) Нека a_n , $n \in \mathbb{N}$ е n -та цифра в десетичния запис на числото $\sqrt{2}$.

Получаваме редицата $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 4, a_5 = 2, a_6 = 1, a_7 = 3, a_8 = 5, a_9 = 6, a_{10} = 2, \dots$

Функцията $evalf(x, n)$ дава приближена стойност на x с n на брой цифри. Ако n не е зададено, $evalf(x)$ пресмята стойността с 10 цифри.

$evalf(2^{\frac{1}{2}});$

$evalf(\sqrt{2}, 20);$

1.414213562

1.4142135623730950488.

Специалните символи, като $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{x}$, $\sum_{k=1}^n a_k$ се избират от менютата в лявата част на работния прозорец на Maple.

Възможно е да дефинираме множество L и да разгледаме редица, дефинирана само върху множеството L .

$L := [seq(i, i = 1..10, 2)];$

$seq(2 \cdot i + 1, i \in L);$

$L := [1, 3, 5, 7, 9]$

3, 7, 11, 15, 19

Задаването на една редица чрез формула е най-удобният метод за изследване свойствата на редицата. Има възможност да бъде намерена формула за общия член на редици, които са зададени с рекурентна връзка. Добре известни са аритметичната $a_n = a_{n-1} + d$ и геометричната $b_n = b_{n-1}q$ прогресии. Наистина, освен с рекурентна връзка има и

представяне на a_n чрез формулата $a_n = a_1 + (n - 1)d$ и за b_n чрез формулата $b_n = b_1 q^{n-1}$. Ще разгледаме една по-сложна редица.

Пример 2.6 (*Редица на Фибоначи*) Нека $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Ще потърсим редица от вида $\{\alpha^n\}_{n=1}^\infty$, $\alpha \neq 0$, която да удовлетворява рекурентната връзка. Очевидно $\alpha \neq 0$. Тогава би трябвало $a_n = \alpha^n$. Заместваме в рекурентното условие и получаваме уравнението $\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$, което ще наричаме характеристично уравнение. Характеристичното уравнение е еквивалентно на $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, защото $\alpha \neq 0$. Последното уравнение има корени $\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ и $\alpha_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Всяка една от редиците $\{\alpha_i^n\}_{n=1}^\infty$, както и редицата $\{x\alpha_1^n + y\alpha_2^n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяват рекурентната връзка. Коефициентите x и y ще определим от условията $a_1 = 1$ и $a_2 = 1$. Решаваме системата

$$\begin{cases} x\alpha_1 + y\alpha_2 = 1 \\ x\alpha_1^2 + y\alpha_2^2 = 1 \end{cases}$$

и получаваме $x = \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $y = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Следователно формула за общия член на редицата на Фибоначи е

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Командата в *Maple*: `solve({уравнения или неравенства},{променливи спрямо които решаваме системата})` решава уравнение, неравенство, системи от уравнения или неравенства. Втората променлива в командата `solve` указва спрямо кои променливи се решават уравненията или неравенствата.

Ще илюстрираме използването на командата `solve` за пресмятанията от Пример 2.6.

С командата `unassign('f')` изчистваме от паметта присвоените стойности на f . Дефинираме

```
unassign('f');
f := (u, v) → u + v;
(u, v) → u + v
```

С тази команда дефинираме функция, която събира двете променливи u и v . Наистина

```
f(2,3);
5
```

Решаваме характеристичното уравнение в *Maple* и записваме корените му в променливата `sol`

```
sol := solve(alpha^n = f(alpha^(n-1), alpha^(n-2), alpha);
1 + sqrt(5)  1 - sqrt(5)
-----, -----, 0
2            2
```


Коренът $\alpha = 0$ не ни е необходим. Двата корена на характеристичното уравнение α_1 и α_2 можем да използваме с командата $sol[1]$ и $sol[2]$.

Дефинираме първите два члена на редицата

$a1 := 1; a2 := 1;$

1, 1.

Дефинираме уравненията:

$eq1 := x \cdot sol[1] + y \cdot sol[2] = a1;$

$$x \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) + y \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

и

$eq2 := x \cdot (sol[1])^2 + y \cdot (sol[2])^2 = a2;$

$$x \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 + y \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1$$

Ще решим системата, която определя коефициентите x и y и решенията ще запишем в променливата $sol2$

$sol2 := solve(\{eq1, eq2\}, \{x, y\});$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

Намираме формулата за общия член на редицата. Командата $a := n \rightarrow f$, дефинира формулата, по която се пресмятат членовете на редицата $a_n = a(n)$, където a е името на редицата, n е индекс, f е функция, която зависи от индекса n .

$a := n \rightarrow (eval(x, sol2[1])) \cdot sol[1]^n + (eval(y, sol2[1])) \cdot sol[2]^n;$

$seq(simplify(a(i)), i = 1..10);$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.

С командата $simplify$ се опростява израза, когато това е възможно.

Сега лесно можем да решим произволна задача, в която имаме рекурентна връзка от вида: $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_n = ca_{n-1} + da_{n-2}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Например нека $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = -3$.

$unassign('f');$

$f := (u, v) \rightarrow 4 \cdot u - 3 \cdot v;$

$(u, v) \rightarrow 4u - 3v$

$sol := solve(\alpha^n = f(\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}), \alpha);$

1, 3, 0

$a1 := 2; a2 := 3;$

2, 3.

$eq1 := x \cdot sol[1] + y \cdot sol[2] = a1;$

$x + 3y = 2$

и

$eq2 := x \cdot (sol[1])^2 + y \cdot (sol[2])^2 = a2;$

$x + 9y = 3$

$sol2 := solve(\{eq1, eq2\}, \{x, y\});$

$\frac{3}{2}, \frac{1}{6}$

$a := n \rightarrow (eval(x, sol2[1])) \cdot sol[1]^n + (eval(y, sol2[1])) \cdot sol[2]^n;$

$seq(simplify(a(i)), i = 1..10);$

$a_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{6}3^n$

2, 3, 6, 15, 42, 123, 366, 1095, 3282, 9843, 29526, 88575, 265722, 797163, 2391486, 7174455, 21523362, 64570083, 193710246, 581130735.

Леонардо Фибоначи (около 1170 – около 1240) е италиански математик, работил през първата половина на 13 век. Определян като „най-талантливият западен математик на Средновековието“, наред с останалите математици на своето време, той допринася за възрождането на класическите точни науки след техния упадък през Ранното Средновековие. Днес Фибоначи е най-известен с популяризирането в Европа на арабските цифри, които използва в своя основен труд „Книга за смятането“ („*Liber Abaci*“), както и на числовата редица, наречена по-късно на негово име числа на Фибоначи, която не е негово откритие, но е използвана от него като пример в „Книга за смятането“. Бащата на Леонардо е официален представител на търговеците от Пизанската република в Буджа, пристанище в днешен Алжир. През тези години Буджа е важно интелектуално средище и в града живеят видни арабски учени, като Абу Мадян и Абд ал-Хак ал-Ишбили. Като дете Леонардо живее там заедно с баща си, и още по това време се запознава с арабските цифри. След като установява, че аритметичните изчисления с арабски цифри са по-прости и ефек-



Фигура 9: Leonardo Fibonacsi

тивни, отколкото с римски цифри, Фибоначи предприема пътувания в Средиземноморието - Египет, Сирия, Сицилия, Прованс, Цариград, за да се учи при водещите математици от това време. Той се връща в Италия около 1200 година, а през 1202 година публикува наученото в своята „Книга за смятането“. Популярността, която придобива с „Книга за смятането“ и с успешното решаване на някои математически задачи, зададени от придворните математици на император Фридрих II, осигуряват на Фибоначи място в двора на владетеля, който покровителства математиката и природните науки. Издържан от него, през следващите години Фибоначи пише още няколко математически книги. Първото издание на „Книга за смятането“ е изгубено, но през 1228 година по искане на шотландския математик Майкъл Скот Фибоначи изготвя второ преработено издание, което достига до наши дни. През 1240 година, получава пенсия.

В своята „Книга за смятането“ от 1202 година Фибоначи представя т.нар. „индийски метод“, известен днес като арабски цифри. В книгата се застъпва използването на десетична бройна система с позиционна номерация и демонстрира практическите преимущества на този метод, прилагайки решетчно умножение и египетски дробни в счетоводството, преобразуването на единиците за измерване, изчисляването на лихви и обменни курсове. Освен използването на арабските цифри, книгата включва и критерии за делимост, правила за изчисляване на квадратни и кубични корени, както и множество примерни задачи с техните решения. „Книга

за смятането“ става популярна сред образованите кръгове в Западна Европа и оказва силно влияние върху развитието на западноевропейската мисъл. Първоначално използването на арабските цифри е прието нееднозначно и дори през 1280 година общината на Флоренция забранява тяхната употреба в банките. Смята се, че цифрата 0, която не съществува в системата на римските цифри, предизвиква объркване, а според някои дори служи за предаване на тайни съобщения. „Книга за смятането“ включва и решение на задача за рвста на популацията на зайци при идеализирани условия. Решението за всяко следващо поколение образува редица от числа, наречени по-късно числа на Фибоначи. Тя е известна на индийските математици още през 6 век, но именно Фибоначи популяризира тази идея на Запад. Колкото по-далечни елементи от редицата се вземат, толкова по-точно всеки две съседни числа, разделени едно на друго, се доближават до златното сечение (приблизително 1,618 или 0,618 в зависимост дали вземаме a_n/a_{n+1} или a_{n+1}/a_n). Значението на числата на Фибоначи в математиката е толкова голямо, че и днес на тях е посветено самостоятелно периодично издание, *Fibonacci Quarterly*. Името на Фибоначи присъства в съвременната култура най-вече във връзка с числата на Фибоначи. Така корекция на Фибоначи е наименование на метод в съвременните финанси, предназначен за определянето на бъдещите цени на акции.

ЗАДАЧИ

1) Напишете първите 100 члена на редиците:

а) $a_n = \frac{n+1}{n-1}$; б) $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$; в) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$;
 г) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})\sqrt{n}$; д) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$; е) $a_n = n \bmod 5$.

2) Напишете първите 100 члена на редиците:

а) $a_{n+1} = a_n + d$; б) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$; в) $a_{n+1} = \lambda a_n$;
 г) $a_{n+1} = (n+1)a_n$; д) $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$; е) $a_{n+1} = a^{n+1}a_n$.

3) Намерете формула за общия член на редиците:

а) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = 4a_{n-1} + 3a_{n-2}$ за всяко $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$;
 б) $a_1 = 12, a_2 = 24, a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ за всяко $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$;
 в) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ за всяко $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

2.2 Основни видове числови редици

Определение 2.1 Нека е дадена числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

- 1) Казваме, че числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща, ако $a_n < a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$;
- 2) Казваме, че числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща, ако $a_n > a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$;
- 3) Казваме, че числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ненамаляваща, ако $a_n \leq a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$;
- 4) Казваме, че числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е нерастяща, ако $a_n \geq a_{n+1}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

За да се подчертае строгото растене (намаляване) се използва още термина строго растяща за 1) и строго намаляваща за 2).

Пример 2.7 Редицата $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$.

Пример 2.8 Редицата $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща $(1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots)$.

Пример 2.9 Редицата $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots, n, n, \dots$ е ненамаляваща.

Пример 2.10 Редицата $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ е нерастяща.

Пример 2.11 Редицата $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ е нито растяща нито намаляваща.

Определение 2.2 Нека е дадена числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

- 1) Казваме, че числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонна, ако тя е или ненамаляваща или нерастяща;
- 2) Казваме, че числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго монотонна, ако тя е или растяща или е намаляваща.

Определение 2.3 Нека е дадена числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

- 1) Казваме, че числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре, ако съществува M , така че $a_n \leq M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$;
- 2) Казваме, че числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отдолу, ако съществува M , така че $a_n \geq M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$;
- 3) Казваме, че числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, ако съществува M , така че $|a_n| \leq M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Ако една числова редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отдолу и отгоре, то тя е ограничена. Наистина съществуват $m, M \in \mathbb{R}$, така че $m \leq a_n \leq M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Нека положим $N = \max\{|m|, |M|\}$. Тогава $-N \leq a_n \leq N$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, т.е. $|a_n| \leq N$.

Пример 2.12 Редицата $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, но не е монотонна.

Пример 2.13 Редицата $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена и монотонна.

Пример 2.14 Редицата $\{2^n\}_{n=1}^\infty$ е монотонна, ограничено отдолу ($2 \leq 2^n, n \in \mathbb{N}$), но не е ограничена.

Пример 2.15 Редицата $1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, \dots, 1, n, 1, \dots$ е ограничено отдолу, не е ограничена и не е монотонна.

Редицата от Пример 2.5 е ограничена с $M = 9$.

ЗАДАЧИ:

1) Изследвайте, кои от редиците са монотонни и какъв е видът на монотонността, ако са монотонни:

а) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$; б) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$; в) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$;

г) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$; д) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})\sqrt{n}$;

е) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$; ж) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})n^2$.

2) Изследвайте, кои от редиците са ограничени отдолу, ограничени отгоре и ограничени:

а) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$; б) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$; в) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$;

г) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$; д) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$; е) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$;

ж) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})\sqrt{n}$; з) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})n^2$.

2.3 Сходящи числови редици

Важна роля в математиката играят сходящите числови редици.

Определение 2.4 Казваме, че числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ е сходяща, ако съществува число a , така че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N$ е изпълнено неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$.

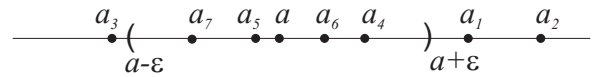
Числото a наричаме граница на редица $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ и отбелязваме с $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Ако една редица не е сходяща, се нарича разходяща.

Определение 2.4 казва, че ако една редица е сходяща, то съществува реално число a , така че за всеки интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, където $\varepsilon > 0$, всички членове на редицата $\{a_n\}$, започващи от дадено място, принадлежат на интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ (Фиг. 10)

Твърдение 2.1 Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където $a_n = a$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, има граница a .

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от равенството $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ за всяко $\varepsilon > 0$. \square



Пример 2.16 Редицата $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ има граница 0.

Фигура 10: Сходяща числова редица

Наистина, неравенството $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ е еквивалентно на $-\varepsilon < 1/n < \varepsilon$ или $1/n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. За всяко число $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, така че е в сила неравенството $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Следователно за всяко $n \geq N$ е изпълнено $1/n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

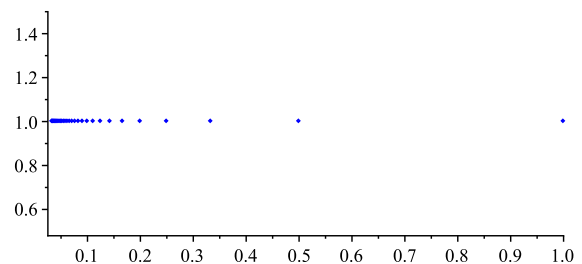
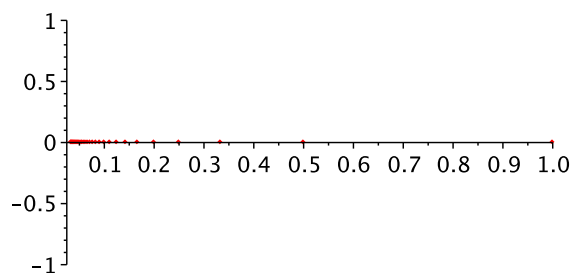
Можем да използваме *Maple* за визуализиране на редицата, като точки върху реалната права. Необходимо е да стартираме пакета *plots* с командата *with(plots)* :

По подразбиране *Maple* стартира само ограничен брой функции. Ако искаме да стартираме функция, която не е стартирана по подразбиране, тогава трябва да стартираме пакета, в който тя е дефинирана.

Изобразяваме всеки елемент от редицата като точка от Декартовата равнина с координати $(a_n, 0)$, където a_n е n -ият елемент на редицата, а втората координата е 0, което означава че точките ще лежат върху реалната права (Фиг. 11). Параметърът *color* указва цвета с който искаме да изобразим точките $(a_n, 0)$.

pointplot $\left(\left[seq \left(\left[\frac{1}{n}, 0 \right], n = 20..30 \right) \right], color = red, axesfont = ["ARIEL", "ROMAN", 14] \right);$

Параметърът *axesfont* = ["ARIEL", "ROMAN", 14] задава вида шрифт, който да се използва за цифровите деления върху осите и размера на цифрите. Можем да изобразим елементите на редицата върху произволна права, успоредна на реалната права като променим втората координата (Фиг. 11).



Фигура 11: Графика на редицата $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

pointplot $\left(\left[seq \left(\left[\frac{1}{n}, 1 \right], n = 20..30 \right) \right], color = blue, axesfont = ["TIMES", "ROMAN", 16] \right);$

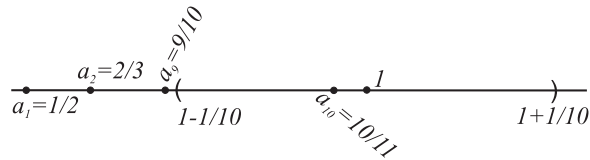
Пример 2.17 Редицата $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ има граница 1 (Фиг. 12).

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. В сила са равенствата:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $N > 1/\varepsilon$. Следователно за всяко $n \geq N$ е изпълнено

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

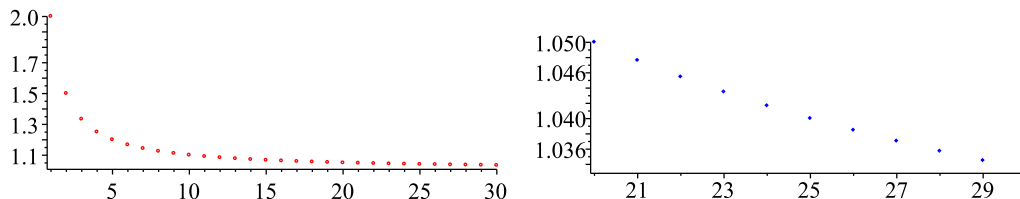


Фигура 12: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

На Фигура 12 са дадени първите няколко члена на редицата $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\varepsilon = 1/10$.

Можем да визуализираме елементите на редицата a_n като ги представим с точки от Декартовата равнина с координати $a_n = (n, a_n)$ (Фиг. 13). Можем да избираме различни цветове с параметъра *color* = цвят и различни символи с параметъра *symbol* = символ за графичното изчертаване на елементите на редицата.

pointplot(seq([n, (n+1)/n], n = 1..30), color = red, symbol = circle);
pointplot(seq([n, (n+1)/n], n = 20..30), color = blue, symbol = diamond)



Фигура 13: Графика на редицата $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Пример 2.18 Редицата $\left\{\frac{3n+1}{5n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ има граница 3/5.

В сила са равенствата:

$$\left|\frac{3n+1}{5n+2} - \frac{3}{5}\right| = \left|-\frac{1}{25n+10}\right| = \frac{1}{25n+10}.$$

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Ако изберем $N \in \mathbb{N}$, така че $N > \frac{\frac{1}{5} - 10}{25}$, то за всяко $n \geq N$ ще е изпълнено неравенството

$$\left|\frac{3n+1}{5n+2} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon.$$

Таблицата ни показва за различни стойности на ε каква стойност на N можем да изберем:

ε	0.1	0.05	0.01	0.002	0.001	0.0003	0.0001
N	1	1	4	20	40	133	400

За да преброим колко елемента съдържа едно множество A използваме командата $\text{numelems}(A)$. Въвеждаме стойностите на ε като елементи на множеството A , за които искаме да намерим за кои $N \in \mathbb{N}$ е в сила неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$. Командата $\text{numelems}(A)$ извежда броя на елементите в множеството A .

$A := [0.1, 0.05, 0.01, 0.002, 0.001, 0.0003, 0.0001]; s := \text{numelems}(A);$

$[0.1, 0.05, 0.01, 0.002, 0.001, 0.0003, 0.0001]$

7

Използваме цикъл, за да обходим всички елементи на множеството A и да решим неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$. Командата $A[i]$ връща елемента на позиция i в множеството A .

$\text{for } i \text{ from } 1 \text{ to } s \text{ do evalf}\left(\text{solve}\left(\left\{n > 0, \frac{1}{25 \cdot n + 10} < A[i]\right\}, n\right)\right) \text{ end do};$

$0. < n$

$0.4000000000 < n$

$3.600000000 < n$

$19.60000000 < n$

$39.60000000 < n$

$132.9333333 < n$

$399.6000000 < n$

Използваме командата $\text{evalf}(\text{solve}(n > 0, 1/(25 \cdot n + 10) < A[i], n))$, защото в противен случай решението се извежда като рационално число. Включваме неравенството $n > 0$, защото търсим решение в множеството на естествените числа.

Може да се използва допълнителен параметър useassumptions в командата solve , който да ограничава дефиниционната област на решенията, без да се включват допълнителни неравенства. След командата solve трябва да опишем допълнителните ограничения за множеството, в което търсим решенията. Функцията $\text{abs}(x)$ дефинира модул от x в *Maple*.

$\text{for } i \text{ to } 4 \text{ do}$

$\text{solve}\left(\text{abs}\left(\frac{3 \cdot n + 1}{5 \cdot n + 2} - \frac{3}{5}\right) < \frac{1}{10^i}, n, \text{useassumptions}\right) \text{ assuming } n > 0;$

end do

$\text{RealRange}(\text{Open}(0), \text{infinity})$

$\text{RealRange}(\text{Open}(18/5), \text{infinity})$

$\text{RealRange}(\text{Open}(198/5), \text{infinity})$

$\text{RealRange}(\text{Open}(1998/5), \text{infinity})$

Отговорът, който получаваме е в рационални числа. Ако искаме да получим отговор в десетична дроб, трябва някъде да използваме десетичен запис на число, което участва в решението на неравенствата.

for i to 4 do

solve $\left(\text{abs} \left(\frac{3 \cdot n + 1}{5.0 \cdot n + 2} - \frac{3}{5} \right) < \frac{1}{10^i}, n, \text{useassumptions} \right)$ *assuming* $n > 0$;

end do

RealRange(*Open*(0.), *infinity*)

RealRange(*Open*(3.600000000), *infinity*)

RealRange(*Open*(39.60000000), *infinity*)

RealRange(*Open*(399.6000000), *infinity*)

Командата *limit*($a_n, n = \text{infinity}$) или $\lim_{n \rightarrow \infty}$ пресмята граница на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

limit $\left(\frac{3 \cdot n + 1}{5 \cdot n + 2}, n = \text{infinity} \right); \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot n + 1}{5 \cdot n + 2};$

$\frac{3}{5}$
 $\frac{3}{5}$.

Пример 2.19 Докажете, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}$.

Неравенствата

$$\left| \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3} \right| = \frac{5n - 10}{3(3n^2 + 2n - 4)} < \frac{5n}{3(3n^2 + 2n - 4)} < \frac{5n}{6n^2} < \frac{1}{n},$$

са изпълнени за всяко $n \geq 2$. Тогава за всяко ε ако изберем $N > 1/\varepsilon$, то ще е в сила неравенството

$$\left| \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$$

за всяко $n \geq N$.

limit $\left(\frac{n^2 - n + 2}{3 \cdot n^2 + 2 \cdot n - 4}, n = \text{infinity} \right);$

$\frac{1}{3}$.

Тъй като се интересуваме неравенството $\left| \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon$ да бъде изпълнено за всички n от дадено място нататък, то можем да приемем, че $n \geq 2$.

Твърдение 2.2 1) Ако към една сходяща числова редица добавим краен брой членове, то пак ще получим сходяща числова редица със същата граница.

2) Ако от една сходяща числова редица извадим краен брой членове, то пак ще получим сходяща числова редица със същата граница.

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от определението за сходимост на редица. Наистина, ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница a , то за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват краен брой членове a_n , така че $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Добавянето или изваждането на краен брой членове, няма да измени условието извън интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ да остават само краен брой членове. \square

Твърдение 2.3 *Всяка сходяща числова редица е ограничена.*

Доказателство: Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща редицата. Съществува число a така, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N_\varepsilon$ е изпълнено неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$. Нека изберем $\varepsilon = 1$. Тогава съществува $N_1 \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N_1$ е изпълнено неравенството $|a_n - a| < 1$, т.е. $a - 1 < a_n < a + 1$.

Ако положим $M = \max\{|a - 1|, |a + 1|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1-1}|\}$, то $|a_n| \leq M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. \square

ЗАДАЧИ

1) Докажете, че са верни границите

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 1}{5n + 4} = \frac{4}{5}$, б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} = 2$,

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{5n^2 + 4} = \frac{2}{5}$, г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n + 2}{2n^3 + n^2} = \frac{3}{2}$.

2) Попълнете таблицата за границите от Задача 1)

ε	0.1	0.05	0.01	0.002	0.001	0.0003	0.0001
N							

2.4 Действия с числови редици

Нека са дадени числовите редици $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Умножение на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ с числото α наричаме редицата $\{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Сума или разлика на редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ наричаме съответно редиците $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Произведение на редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ наричаме редицата $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ $b_n \neq 0$, тогава частно на редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ наричаме редицата $\{a_n/b_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Твърдение 2.4 *Нека са дадени две сходящи числови редици $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава:*

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$;

3) Ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$.

Доказателство: 1) Ще докажем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$. От сходимостта на редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $N_a, N_b \in \mathbb{N}$, така че $|a_n - a| < \varepsilon/2$ за всяко $n \geq N_a$ и $|b_n - b| < \varepsilon/2$ за всяко $n \geq N_b$. Тогава за всяко $n \geq N = \max\{N_a, N_b\}$ са изпълнени и двете неравенства $|a_n - a| < \varepsilon/2$ и $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Следователно

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Доказателство на $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$ се провежда аналогично.

2) От сходимостта на редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че тя е ограничена, т.е. съществува B , така че $|b_n| \leq B$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. От сходимостта на редиците следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $N_a, N_b \in \mathbb{N}$, така че $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2B}$ за всяко $n \geq N_a$ и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2a}$ за всяко $n \geq N_b$. Тогава за всяко $n \geq N = \max\{N_a, N_b\}$ са в сила неравенствата

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n - a| |b_n| + |b_n - b| a < \frac{\varepsilon}{2B} B + \frac{\varepsilon}{2a} a = \varepsilon.$$

3) Можем да считаме, че $b > 0$. За $b < 0$ доказателството е аналогично. От $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$ следва, че за $\varepsilon_0 = b/2$ съществува номер $N_0 \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N_0$ е изпълнено неравенството $|b_n - b| < \varepsilon_0 = b/2$, което е еквивалентно на неравенствата $\frac{b}{2} < b_n < \frac{3b}{2}$. Тогава за $n \geq N_0$ е в сила

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|} < \frac{2}{b^2} |b_n - b|.$$

От сходимостта на редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, така че $|b_n - b| < \frac{b^2 \cdot \varepsilon}{2}$. Тогава за всяко $n \geq N = \max\{N_0, N_\varepsilon\}$ е в сила неравенството

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \frac{2}{b^2} |b_n - b| < \varepsilon,$$

от където получаваме, че $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/b_n = 1/b$.

Сега използвайки 2) получаваме, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b_n} \cdot a_n \right) = \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b}$. \square

Следствие 2.1 Нека числовата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница a и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha a_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha a$.

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от Твърдение 2.1 и Твърдение 2.4, ако разгледаме константната редица $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n = \alpha$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. \square

Пример 2.20 Намерете границата на редицата $a_n = \frac{3n+2}{5n-1}$.

Лесно се съобразява, че $a_n = \frac{3n+1}{5n-1} = \frac{n(3+\frac{2}{n})}{n(5-\frac{1}{n})} = \frac{3+\frac{2}{n}}{5-\frac{1}{n}}$.

Съгласно Пример 2.16 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ и Следствие 2.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$. Според Теорема 2.4 са в сила равенствата $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{1}{n}\right) = 5$ и следователно $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{5-\frac{1}{n}} = 3/5$.

Забележка Нека да отбележим, че ако съществува границата $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$, това не означава, че редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ са сходящи. Например, ако $a_n = (-1)^n$ и $b_n = (-1)^{n+1}$, то редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ не са сходящи, а редицата $a_n + b_n = 0$ е сходяща. Същото е в сила и за разлика, произведение и частно на две редици.

Твърдение 2.5 За всяко $p, q \in \mathbb{N}$ е в сила $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p/q}} = 0$.

Доказателство: Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Нека изберем $N = \left\lceil \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{q/p} \right\rceil + 1$. Тогава за всяко $n \geq N$ е изпълнено неравенството $\frac{1}{n^{p/q}} < \varepsilon$. \square

Пример 2.21 Намерете границата на редицата $a_n = \frac{\sqrt[2]{n^3} + n}{2\sqrt[2]{n^3} + \sqrt[3]{n}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2]{n^3} + n}{2\sqrt[2]{n^3} + \sqrt[3]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2]{n^3} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{\sqrt[2]{n^3} \left(2 + \frac{1}{\sqrt[6]{n^2}}\right)} = \frac{1}{2}.$$

ЗАДАЧИ

1) Да се намерят границите:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^7 + 3n^5 - n + 1}{n^7 - n^6 + n^2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 2n^3 - 1}{2n^3 - n}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n^3 - n}{4n^5 - n^4 + n^2}$.

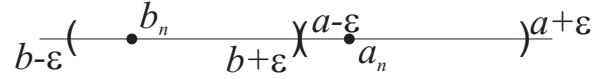
2) Да се намерят границите:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^5} + 2n + \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^5} + \sqrt[3]{n^4}}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt[3]{n^7} + n^2 + \sqrt{n^3}}{2\sqrt[3]{n^7} + n + \sqrt{n^3}}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^2 + \sqrt[3]{n^8}}{n^4 + n^3 + \sqrt[2]{n^7}}$.

2.5 Неравенства и граници на редици

Лема 2.1 (Граничен преход в неравенства) Нека са дадени две сходящи числови редици $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ и $a_n \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава $a \leq b$.

Доказателство: Нека да допуснем противното, т.е. $a > b$. Нека изберем $\varepsilon = (a - b)/2$. Тогава $b - \varepsilon < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a + \varepsilon$. От сходимостта на редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че съществуват N_a и N_b , така че $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ за всяко $n \geq N_a$ и $b_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ за всяко $n \geq N_b$. Нека изберем $N = \max\{N_a, N_b\}$. Тогава за всяко $n \geq N$ са в сила неравенствата: $b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n$ (Фигура 14), което противоречи на условието $a_n \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. \square

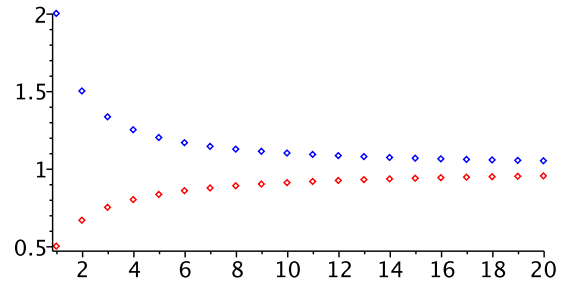


Фигура 14: Граничен преход в неравенствата

Пример 2.22 Нека $a_n = \frac{n}{n+1}$ и $b_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Веднага се вижда, че $a_n < 1 < b_n$ и че $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$. Този пример показва, че в Лема 2.1 дори да поискаме строго неравенство за членовете на редицата, не следва строго неравенство за техните граници.

Можем да визуализираме редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ от Пример 2.22 в *Maple* (Фиг. 15). Първо дефинираме редиците $a = \{(n, a_n)\}$ и $b = \{(n, b_n)\}$.



Фигура 15: Графика на редиците $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$a := \left[seq\left(\left[n, \frac{n}{n+1}\right], n = 1..20\right)\right];$
 $b := \left[seq\left(\left[n, 1 + \frac{1}{n}\right], n = 1..20\right)\right];$

$\left[1, \frac{1}{2}\right], \left[2, \frac{2}{3}\right], \left[3, \frac{3}{4}\right], \left[4, \frac{4}{5}\right], \left[5, \frac{5}{6}\right], \left[6, \frac{6}{7}\right], \left[7, \frac{7}{8}\right], \left[8, \frac{8}{9}\right], \left[9, \frac{9}{10}\right], \left[10, \frac{10}{11}\right],$
 $\left[11, \frac{11}{12}\right], \left[12, \frac{12}{13}\right], \left[13, \frac{13}{14}\right], \left[14, \frac{14}{15}\right], \left[15, \frac{15}{16}\right], \left[16, \frac{16}{17}\right], \left[17, \frac{17}{18}\right], \left[18, \frac{18}{19}\right], \left[19, \frac{19}{20}\right], \left[20, \frac{20}{21}\right]$
 $\left[1, 2\right], \left[2, \frac{3}{2}\right], \left[3, \frac{4}{3}\right], \left[4, \frac{5}{4}\right], \left[5, \frac{6}{5}\right], \left[6, \frac{7}{6}\right], \left[7, \frac{8}{7}\right], \left[8, \frac{9}{8}\right], \left[9, \frac{10}{9}\right], \left[10, \frac{11}{10}\right],$
 $\left[11, \frac{12}{11}\right], \left[12, \frac{13}{12}\right], \left[13, \frac{14}{13}\right], \left[14, \frac{15}{14}\right], \left[15, \frac{16}{15}\right], \left[16, \frac{17}{16}\right], \left[17, \frac{18}{17}\right], \left[18, \frac{19}{18}\right], \left[19, \frac{20}{19}\right], \left[20, \frac{21}{20}\right]$

Изобразяваме графично елементите на редиците $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ (Фиг. 15).

$plot([a, b], color = [red, blue], style = [point]);$

Лема 2.2 (Лема за двамата полицаи) Нека са дадени три числови редици $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяващи неравенствата $a_n \leq b_n \leq c_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Тогава, ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = s$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = s$.

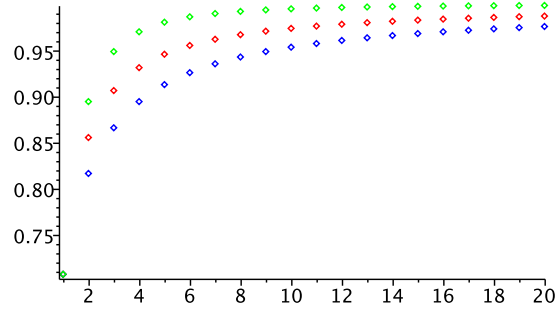
Доказателство: Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. От $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = s$ следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N$ са изпълнени неравенствата $s - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < s + \varepsilon$ от където получаваме, че $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = s$. \square

Пример 2.23 Намерете границата на редицата $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$.

За намирането на границата на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ще използваме Лема 2.2. В сила са неравенствата

$$b_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} \leq n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq a_n \leq n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \leq \frac{n}{n} = 1 = c_n$$

за всяко $n \in \mathbb{N}$. От Пример 2.17 получаваме, че $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, от Твърдение 2.1 получаваме $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ и следователно $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.



Фигура 16: Графика на редиците $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$

Командата $sum(f, k = m..n)$ или $\sum_{i=m}^n f$ в Maple сумира редицата, която е зададена с формулата f по индекса k от m до n .

$limit\left(sum\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}, k = 1..n\right), n = infinity\right); \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} :$

1

$b := \left[seq\left(\left[n, sum\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}, k = 1..n\right)\right], n = 1..20\right)\right];$
 $a := \left[seq\left(\left[n, sum\left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}, k = 1..n\right)\right], n = 1..20\right)\right];$

```

c := [seq([n, sum(1/sqrt(n^2 + 1), k = 1..n)], n = 1..20)];
plot([a, b, c], color = [red, blue, green], style = [point]);

```

Пример 2.24 Да се намери обема V на триъгълна пирамида.

Нека да разделим височината на пирамидата на n равни части и да прекараме успоредни на основата равнини през точките на деление. Сеченията са триъгълници, които са подобни на основата. Ако $DA_k/DA = k/n$, то лицето на триъгълника $\triangle A_k B_k C_k$, прекаран през точката A_k и успореден на основата има лице $\frac{k^2}{n^2} S_{\triangle ABC}$. Построяваме спомагателни призми $A_k B'_k C'_k A_{k-1} B_{k-1} C_{k-1}$, вписани в пирамидата, а другите $A_k B_k C_k A''_{k-1} B''_{k-1} C''_{k-1}$, описани около нея (Фигура 17). Нека означим обемите им съответно с W_n и V_n . Очевидно $W_n < V < V_n$. Лесно се съобразява, че разликата $V_n - W_n$ е обемът на призма с основа $\triangle ABC$ и височина h/n . Тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} (V_n - W_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h S_{\triangle ABC}}{n} = 0$ и следователно $\lim_{n \rightarrow \infty} (V - W_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (V_n - V) = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n = V$.

Остава да пресметнем W_n . Веднага се вижда, че

$$\begin{aligned}
W_n &= \frac{h}{n} \frac{1}{n^2} S_{\triangle ABC} + \frac{h}{n} \frac{2^2}{n^2} S_{\triangle ABC} + \dots + \frac{h}{n} \frac{k^2}{n^2} S_{\triangle ABC} + \dots + \frac{h}{n} \frac{n^2}{n^2} S_{\triangle ABC} = \frac{h}{n} \frac{S_{\triangle ABC}}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \\
&= \frac{h S_{\triangle ABC}}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = h S_{\triangle ABC} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Следователно

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h S_{\triangle ABC} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{h S_{\triangle ABC}}{3}.$$

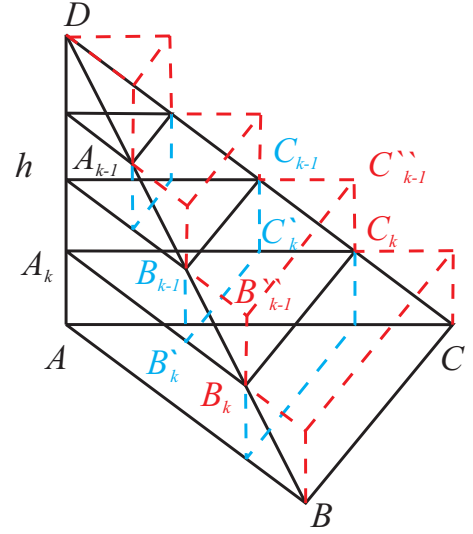
□

Функцията $sum(f, k = m..n)$ можем да се изпише и като $\sum_{k=m}^n f$. Функцията \sum се намира в прозорците в лявата част на *Maple*. Командата $factor(f)$ преобразува израза f във вид на множители, когато това е възможно.

```

S := sum(k^2, k=1..n);
factor(S);

```



Фигура 17: Обем на тетраедър

$$\frac{(n+1)^3}{6} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n}{6} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Пример 2.25 Да се намери лицето на фигурата, образува-
на от параболата $y = ax^2$, отсечките OP и PM (Фиг. 18).

Нека да разделим отсечката OP на n равни части и да прекараме прави успоредни на оста Oy . Построяваме спома-
гателни правоъгълници, едните вписани във фигурата, а дру-
гите описани около нея (Фигура 18). Нека означим лицата им
съответно с Q_n и S_n . Очевидно $Q_n < S < S_n$. Лесно се съобра-
зява, че $S_n - Q_n = \frac{xy}{n}$. Тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - Q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{xy}{n} =$
 0 и следователно $\lim_{n \rightarrow \infty} (S - Q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S) = 0$ и
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = S$.

Остава да пресметнем S_n . Веднага се вижда, че

$$S_n = a \left(\frac{x}{n} \right)^2 \frac{x}{n} + a \left(\frac{2x}{n} \right)^2 \frac{x}{n} + \dots + a \left(\frac{kx}{n} \right)^2 \frac{x}{n} + \dots + a \left(\frac{nx}{n} \right)^2 \frac{x}{n} = \sum_{k=1}^n a \frac{k^2 x^3}{n^3}$$

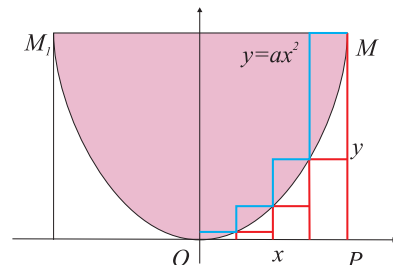
$$= \frac{ax^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{ax^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{ax^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}.$$

Следователно

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{x \cdot ax^2}{3}.$$

От тук лесно се получава, че лицето на параболичния сегмент OMM_1 е равно на
 $S_{OMM_1} = 2(OP \cdot PM - S_{OPM}) = 2 \left(xy - \frac{a}{3} x^3 \right) = 2 \left(ax^3 - \frac{a}{3} x^3 \right) = \frac{4a}{3} x^3$, където $y = ax^2$. Този
резултат е бил известен още на Архимед.

В историческите източници Архимед е наричан Архимед от Сиракуза. Предполага се, че
Архимед е син на астронома Фидий. Архимед получава образованието си в Александрия. Някои
историци на математиката смятат Архимед (Archimedes of Syracuse 284–212 пр.н.е.) роден и
живял в Сиракуза, Сицилия за един от най-големите математици в историята наред с Ню-
тон, Гаус и Ойлер. Неговите приноси са в геометрията, механиката и дори е считан за един
от пионерите на математическия анализ. Системно е прилагал математиката в естествоз-
нанието и в техническите си открития и изобретения. Намира едно добро приближение на
числото π ($223/71 < \pi < 22/7$, $\pi \approx 3,1418$); Изчислява повърхността на параболичен сегмент
и обемите на различни математически тела, намира формула за обема на ротационни тела,
изследва множество криви и спирали, една от които носи неговото име: архимедова спира-
ла. Дава определения за полуправилни многостени, наричани архимедови тела. Архимед дава до-
казателство за неограничеността (отгоре) на редицата на естествените числа (още известно



Фигура 18: Лице на отрез
от параболата

като аксиома на Архимед). Закон на Архимед: "Всяко тяло, потопено в течност, олеква толкова, колкото тежи изтласканата от него течност". Легендата разказва, че когато открил този закон, вземайки си топла вана, Архимед толкова се вгoduшевил, че извикал „Еврика!“ и хукнал гол по улиците на Сиракуза. Архимед се счита за създател на хидростатиката и статиката – дава обяснение на принципа на действие на лоста, покрай който става известна мисълта на Архимед „Дайте ми опорна точка и достатъчно дълъг лост, и ще повдигна Земята!“. Той конструира водоподемния архимедов винт;

По време на обсадата на Сиракуза Архимед проектира обсадните машини (огнехвъргачки), подемници, които да повдигат и да потопяват вражеските кораби в морето, система от огледала, която да запалва корабите. Така с неговите машини се унищожават значителна част от армията на римските нашественици. Когато Сиракуза накрая все пак пада, Архимед е убит от римски войник въпреки заповедите на римския генерал Марк Клавдий Маркел да не бъде докосван. Разпространената от гърците легенда разказва, че Архимед бил посечен, докато пишел някакво уравнение върху пясъка.

На името на Архимед са кръстени кратер и планинска верига на Луната.



Фигура 19: Archimedes of Syracuse

ЗАДАЧИ

1) Докажете:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{3n-1} = \frac{4}{3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 3}{3n^2 - n + 2} = 1; \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2 + n + 2}{2n^3 - n^2 + n - 1} = \frac{1}{2};$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n^2} = 0; \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0; \quad \text{е) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

2) Намерете границите на редиците с общ член съответно:

$$\text{a) } a_n = \frac{\sin(n^2)}{n}; \quad \text{б) } a_n = \frac{\cos(n^2 + n)}{\sqrt{n}};$$

$$\text{в) } a_n = \frac{\sin(n^n - n + 1)}{n^2}; \quad \text{г) } a_n = \frac{\cos(2n + 1)}{2n - 1}.$$

3) Докажете, че редиците

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{n!}; \quad \text{б) } b_n = \frac{2n}{n^3 + 1}; \quad \text{в) } c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad \text{г) } d_n = \frac{(-2)^n}{3^n}$$

имат граница 0 и попълнете таблицата

ε	0.1	0.05	0.01	0.002	0.001	0.0003	0.0001
N							

4) Ако $a, b \in (0, 1)$ намерете

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}.$$

5) Намерете границите:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} \right);$ б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1)} \right);$

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2};$ г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right).$

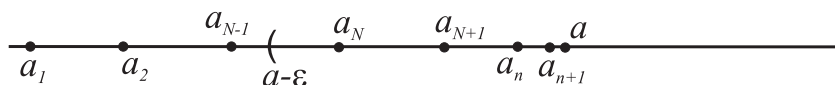
2.6 Монотонни редици

Теорема 2.1 Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонна и ограничена, тогава тя е сходяща.

Доказателство: Ще докажем теоремата само за случая на монотонно растяща редица, тъй като доказателството за монотонно намаляваща редица не се отличава съществено.

Нека редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща и ограничена. Тогава съществува нейната точна горна граница $a = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\}$.

От дефиницията на точната горна граница следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$ така, че за всяко $n \geq N$ е изпълнено неравенството $a_n > a - \varepsilon$. Така получихме, че за всяко $n \geq N$ са изпълнени неравенствата $0 \leq a_n - a < \varepsilon$ (Фигура 20) и следователно $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. \square



Фигура 20: Сходимост на монотонна редица

Пример 2.26 Докажете, че за всяко $c > 0$ е изпълнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$.

Нека дефинираме рекурентната редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, дефинирана с равенството

$$(3) \quad x_{n+1} = x_n \frac{c}{n+1} = \frac{c^{n+1}}{n+1!}.$$

От $\lim_{n \rightarrow \infty} c/n = 0$ следва, че съществува $N_0 \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N_0$ е в сила $c/n < 1$ и следователно редицата $\{x_n\}_{n=N_0}^{\infty}$ е монотонно намаляваща. Очевидно, че редицата

$\{x_n\}_{n=N_0}^\infty$ е ограничена, защото $0 \leq x_n \leq x_{N_0}$, за всяко $n \geq N_0$. Съгласно Теорема 2.1 редицата $\{x_n\}_{n=N_0}^\infty$ е сходяща. Нека положим $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. От Твърдение 2.2 следва, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е сходяща. След граничен преход в (3) получаваме

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \frac{c}{n+1} \right) = a \cdot 0 = 0$$

и следователно $a = 0$.

Ще пресметнем a_n за $n = 1, 2, \dots, 20$ при $c = 6$.

for i to 20 do
evalf $\left(\frac{6^i}{i!}, 3\right)$
end do;
6, 18, 36, 54, 64.8, 64.8, 55.5, 41.7, 27.8, 16.7, 9.09, 4.5, 2.1, 0.8, 0.3, 0.1, 0.04, 0.01, 0.005, 0.001

Пример 2.27 Нека разгледаме редицата $x_1 = \sqrt{c}$, $x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}$, $x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}$, ...
Намерете границата на редицата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

Нека дефинираме рекурентната редица $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, дефинирана с равенството

$$(4) \quad x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}.$$

Ще покажем, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е монотонно растяща. Наистина $x_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c + \sqrt{c}} = x_2$. Да допуснем, че $x_{n-1} < x_n$. Тогава е изпълнено неравенството $x_{n+1} = \sqrt{c + \sqrt{x_n}} > \sqrt{c + \sqrt{x_{n-1}}} = x_n$ и следователно редицата $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ е монотонно растяща.

Ще покажем по индукция, че редицата е ограничена отгоре от $1 + \sqrt{c}$. Наистина, $x_1 = \sqrt{c} < 1 + \sqrt{c}$. Да допуснем, че $x_n < 1 + \sqrt{c}$. Тогава

$$x_{n+1} = \sqrt{c + x_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = 1 + \sqrt{c}.$$

Съгласно Теорема 2.1 редицата (4) е сходяща. Нека да означим границата ѝ с a , да повдигнем на квадрат в (4) и да направим граничен преход (ако $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то съгласно Твърдение 2.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a^2$)

$$a^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (c + x_n) = c + a.$$

Уравнението $a^2 = c + a$ има два корена. Единят е отрицателен и според Лема 2.1 не може да е граница на разглежданата редица, защото разглежданата редица се състои от положителни членове. Тогава остава

$$\frac{\sqrt{4c+1}+1}{2} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

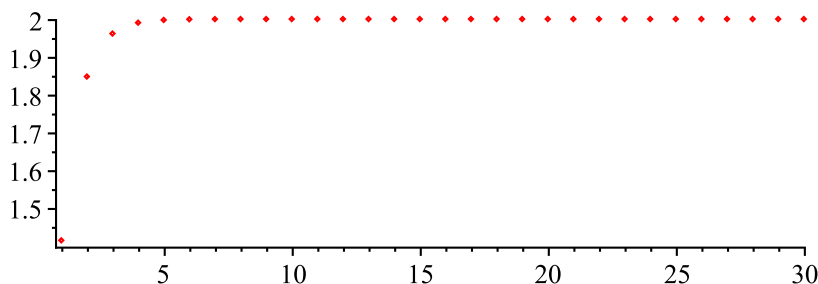
От Пример 2.27 следва, че редицата $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, ... има граница 2.

Ще дефинираме процедура в Maple, която да пресмята членовете на редицата от Пример 2.27 за $c = 2$. И ще пресметнем един елемент на редицата, например a_6 .

```
f := proc(a)
  if a > 1 then  $\sqrt{2 + \text{thisproc}(a - 1)}$ 
  else  $\sqrt{2}$ 
  end if
end proc;
f(6); evalf(f(6));
proc(a)
  if 1 < a then sqrt(2 + thisproc(a - 1))
  else sqrt(2)
  end if
end proc
 $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}$ 
1.999397637
```

Ще визуализираме с помощта на Maple редицата от Пример 2.27 върху декартовата равнина за $c = 2$.

```
with(plots):
pointplot([seq([n, f(n)], n = 1..30)], color = [red]);
```



Фигура 21: Редицата $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{x_{n-1}}}$

ЗАДАЧИ

1) Докажете, че

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, за всяко $0 < q < 1$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^{n^2}} = 0$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} = 0$.

2) Да се изследват за сходимост редиците и да се намерят границите им, когато са сходящи:

а) $a_1 = -3, a_{n+1} = 1 + \frac{6}{a_n}$; б) $a_1 = -\frac{7}{13}, a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2a_n}$;

в) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$; г) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + a_n + 6}{a_n + 6}$.

2.7 Подредици

Определение 2.5 Казваме, че числото a е точка на съгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако за всяко $\varepsilon > 0$ интервалът $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ съдържа безброй много членове на редицата.

Пример 2.28 Нека разгледаме редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където $a_{2n-1} = n$ за $n \in \mathbb{N}$ и $a_{2n} = \frac{1}{n}$.

Тази редица има точка на съгъстяване 0.

Твърдение 2.6 Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница a , то a е единствена точка на съгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказателство: Наистина, ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват само краен брой членове $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Да допуснем, че съществува и друга точка на съгъстяване b за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Без да се ограничава общността на разглежданията можем да приемем, че $a > b$. Избираме $\varepsilon = (a - b)/2$. Тогава от $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ за всяко $n \geq N$ и следователно в интервала $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ има само краен брой членове на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. \square

Определение 2.6 Нека е дадена редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и строго растящата редица от естествени числа $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогава редицата $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ наричаме подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Да разгледаме редицата от Пример 2.28 и редицата от естествени числа $\{2k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогава подредицата $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, отговаряща на $\{2k\}_{k=1}^{\infty}$ е

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/k, \dots$$

Твърдение 2.7 Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница a , то и всяка нейна подредица е сходяща с граница a .

Доказателство: Нека $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е произволна подредица и $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава от $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ за всяко $n \geq N$. Избираме k_0 така, че $n_{k_0} \geq N$ и тогава за всяко $k \geq k_0$ е изпълнено $a_{n_k} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. \square

Твърдение 2.8 Ако a е точка на съгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то съществува подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такава, че $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Доказателство: От условието, че a е точка на съгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват безброй много членове на редицата в интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Нека изберем $\varepsilon = 1$ и произволен номер n_1 , така че $a_{n_1} \in (a - 1, a + 1)$. След това избираме $\varepsilon = 1/2$ и номер $n_2 > n_1$, така че $a_{n_2} \in (a - 1/2, a + 1/2)$. Ако сме избрали $a_{n_{k-1}}$, то избираме $\varepsilon = 1/k$ и $n_k > n_{k-1}$, така че $a_{n_k} \in (a - 1/k, a + 1/k)$. Този избор е възможен, защото интервалът $(a - 1/k, a + 1/k)$ съдържа безброй много членове на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

По построение подредицата $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворява условието $|a_{n_m} - a| < 1/k$ за всяко $k \in \mathbb{N}$ и всички $m \geq k$. \square

Твърдение 2.9 Границата на всяка сходяща подредица на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е точка на съгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказателство: Ако $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ има за граница числото a , то във всяка околност на a се съдържат всички членове на подредицата $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, започвайки от дадено място нататък и следователно се съдържат безброй много членове на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. \square

Пример 2.29 Намерете всички точки на съгъстяване на редицата с общ член

$$a_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Лесно се съобразява, че

$$(-1)^{n+1} = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

и

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = (1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, \dots).$$

Следователно трябва да разгледаме $n = 4k + p$ за $p = 0, 1, 2, 3$. Тогава

$$a_{4k+1} = 1 + 2 \cdot (-1)^{4k+2} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(4k+1)4k}{2}} = 6$$

$$a_{4k+2} = 1 + 2 \cdot (-1)^{4k+3} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(4k+2)(4k+1)}{2}} = -4$$

$$a_{4k+3} = 1 + 2 \cdot (-1)^{4k+4} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(4k+3)(4k+2)}{2}} = 0$$

$$a_{4k+4} = 1 + 2 \cdot (-1)^{4k+5} + 3 \cdot (-1)^{\frac{(4k+4)(4k+3)}{2}} = 2.$$

Следователно редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има четири точки на съгъстяване 6, -4, 0 и 2.

Теорема 2.2 (Болцано–Вайерщрас) Всяка ограничена редица има сходяща подредица.

Доказателство: Достатъчно е да докажем, че всяка ограничена редица има поне една точка на съгъстяване. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена редица и нека $a_n \in [x_1, y_1]$ за всяко $n \in \mathbb{N}$. Разделяме интервала на две равни части $[x_1, \frac{y_1-x_1}{2}]$ и $[\frac{y_1-x_1}{2}, y_1]$. Поне единият от интервалите съдържа безброй много членове на редицата и нека го означим с $[x_2, y_2]$. Разделяме полученият интервал отново на две равни части $[x_2, \frac{y_2-x_2}{2}]$ и $[\frac{y_2-x_2}{2}, y_2]$. Поне единият от интервалите съдържа безброй много членове на редицата и нека го означим с $[x_3, y_3]$. Продължаваме тази процедура по индукция и получаваме редицата от интервали $[x_n, y_n]$, $n \in \mathbb{N}$. По построение е в сила

$$[x_1, y_1] \supset [x_2, y_2] \supset [x_3, y_3] \supset \dots \supset [x_n, y_n] \supset [x_{n+1}, y_{n+1}] \supset \dots$$

и

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n - x_n) = \dots = \frac{1}{2^{n-1}}(y_1 - x_1).$$

Очевидно в сила са неравенствата $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots \leq y_1$ и $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq y_{n+1} \geq \dots \geq x_1$ и следователно редиците $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ са монотонни и ограничени. Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. От равенството $x - y = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_{n+1} - x_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}}(y_1 - x_1) \right)$ следва, че $x = y$. Ще покажем, че точката x е точка на съгъстяване за редицата a_n .

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. От $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N$ е изпълнено $x_n, y_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, т.е. $[x_n, y_n] \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Следователно интервалът $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ съдържа безброй много членове на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. \square

Болцано (1781–1848) е роден в Прага, в семейство на набожни католици. Само той и още едно от дванадесетте им деца доживяват до зряла възраст. През 1796 влиза в Пражкия университет, където учи математика, философия и физика. Започва да изучава теология през 1800 и четири години по-късно става католически свещеник. През 1805 е назначен на новосъздаденото място по философия на религията. Активно се противопоставя на множество преподаватели и църковни лидери с идеите си за социалните вреди от войната и нейната непотребност. Заради нежеланието да се откаже от тези си идеи, Болцано е пропъден от университета през 1819. Той се уединява в провинцията, където се посвещава на своите трудове на социална, религиозна, философска и математическа тематика. Въпреки, че му е забранено да публикува в популярните журнали след напускането на университета, той продължава да развива и публикува своите идеи самостоятелно или в малко известни източно-европейски журнали. Прави първото аналитично доказателство на теоремата за средните стойности. Теоремата на Болцано–Вайерщрас е доказана от Вайерщрас независимо, години след Болцано. Първоначално е известна като Теоремата на Вайерщрас. Така до момента, когато е открита работата на Болцано. През 1842 Болцано се завръща в Прага, където умира през 1848.



Фигура 22: Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano

ЗАДАЧИ

1) Намерете всички точки на съгъстяване на редицата с общ член

а) $a_n = (-1)^{n+1} \left(2 + \frac{3}{n}\right)$; б) $a_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2}$; в) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{\pi n}{4}$;

г) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n \cdot (-1)^n}}$;

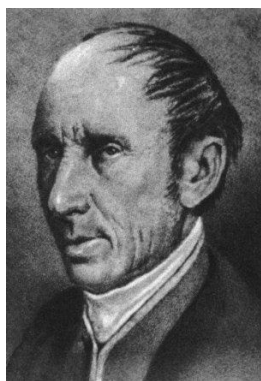
2.8 Критерии за сходимост на редици

Теорема 2.3 *Една редица е сходяща тогава и само тогава, когато е ограничена и има една точка на съгъстяване.*

Доказателство: Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена редица с единствена точка на съгъстяване a . Ще докажем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Да допуснем, че съществуват безброй много членове на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ извън интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. От ограничеността на редицата следва, че съществува C , така че $|a_n| \leq C$ е изпълнено за всяко $n \in \mathbb{N}$. От допускането следва, че поне единият от интервалите $[-C, a - \varepsilon]$ или $[a + \varepsilon, C]$ съдържа безброй много членове на редицата. Съгласно Теорема 2.2 следва, че в поне единия от интервалите $[-C, a - \varepsilon]$ или $[a + \varepsilon, C]$ редицата има точка на съгъстяване. Така стигнахме до противоречие с условието, че редицата има единствена точка на съгъстяване. Следователно извън интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ има само краен брой точки. От произволния избор на $\varepsilon > 0$ следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.

Обратно, ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то според Твърдение 2.3 редицата е ограничена и съгласно Твърдение 2.6 има единствена точка на съгъстяване. \square

Определение 2.7 *Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица на Коши, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всеки две $n, m \geq N$ имаме $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*



Фигура 23: Augustin Louis Cauchy

Огюстен Луи Коши (1789–1857) е френски математик. Първи учител на Огюстен Коши е бил баща му, който занимава сина си с история и древни езици и го кара да изучава античните автори в оригинал. През 1802 г. Коши постъпва в l'Ecole Centrale du Pantheon в Париж, където е изучавал главно древните езици. А през 1805 г. постъпва в Ecole Polytechnique и в l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussees през 1807. Дипломира се като инженер и отива да работи в Cherbourg през 1810. През 1813 се връща в Париж и по настояване на Lagrange и Laplace започва да се занимава с математика. През 1816 г. е приет за член на Парижката академия на науките и преподава в Ecole Polytechnique до 1830, когато напуска, в знак на протест с новоприетия закон, да се дава клетва за вярност към правителството. Работи в Швейцария, Кралство Сардиния. През 1838 отказва предложената му позиция на ректор на College de France в знак на протест

свс закона, да се дава клетва за вярност към правителството. Връща се на работа в *Ecole Polytechnique* през 1848, чак когато законът е отменен. Умира през 1857.

Недостатъкът на определението за сходимост на числова редица е, че трябва да се знае границата ℓ , за да се приложи определението. Следващата теорема дава критерий за изследване на сходимост само чрез членовете на редицата.

Теорема 2.4 *Една редица е сходяща тогава и само тогава, когато е редица на Коши.*

Доказателство: Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\varepsilon > 0$ е избрано произволно. От сходимостта следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $|a_n - a| < \varepsilon/2$ за всяко $n \geq N$. Тогава за всеки $n, m \geq N$ е изпълнено:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. редицата удовлетворява условието на Коши.

Нека сега редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява условието на Коши. Първо ще докажем, че тя е ограничена.

Избираме $\varepsilon = 1$. Съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всеки $n, m \geq N$ е изпълнено $|a_n - a_m| < \varepsilon$, т.е.

$$a_N - 1 < a_m < a_N + 1$$

за всяко $m \geq N$. Полагаме $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N - 1|, |a_N + 1|\}$ и получаваме, че $|a_n| \leq M$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

От Теорема 2.2 следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има сходяща подредица $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. Ще покажем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ за всеки $n, m \geq N$. От сходимостта на подредицата следва, че съществува $k_0 \in \mathbb{N}$, така че $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$ за всяко $k \geq k_0$. Избираме $k \in \mathbb{N}$, така че $n_k > N$ и го фиксираме. Тогава

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Пример 2.30 *Редицата с общ член $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ е разходяща.*

Достатъчно е да проверим, че редицата не удовлетворява условието на Коши. Наистина от

$$|a_{2n} - a_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

следва, че за $\varepsilon < 1/2$ условието на Коши не е изпълнено.

Нека отбележим, че $|a_n - a_{n+1}| = \frac{1}{n+1}$, т.е. разликата между два съседни члена на редицата клони към нула. Въпреки това редицата не е сходяща.

Пример 2.31 Редицата с общ член $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^2}$ е сходяща.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Тогава

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k}{k^2} \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| < \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} \right| \\ &= \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

където използваме равенството $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Следователно, ако изберем $N \in \mathbb{N}$, така че $N > 1/\varepsilon$ то за всяко $n \geq N$ ще бъде изпълнено неравенството $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

ЗАДАЧИ

1) Докажете, че редиците са сходящи с критерия на Коши

а) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$; б) $a_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k q^k$, $q \in (0, 1)$, $|\alpha_k| \leq M$; в) $a_n = \frac{\cos(n\pi) - 1}{2n}$; г) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k}$.

2) Докажете, че редиците са разходящи с критерия на Коши

а) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$; б) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)^2}$; в) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$;

г) $a_n = \frac{\cos(n\pi) - 1}{2}$; е) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(-1)^n \cdot n}$.

2.9 Безкрайно малки и безкрайно големи редици

Определение 2.8 Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ е безкрайно малка, ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Пример 2.32 Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то редицата $\{a_n - a\}_{n=1}^\infty$ е безкрайно малка.

Можем да дадем следното определение за сходимост на редица:

Определение 2.9 Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ е сходяща, ако съществува a , така че редицата $\{a_n - a\}_{n=1}^\infty$ е безкрайно малка.

Определение 2.10 Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ клони към $+\infty$, ако за всяко $M > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $a_n > M$ за всяко $n \geq N$.

Определение 2.11 Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ клони към $-\infty$, ако за всяко $M < 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $a_n < M$ за всяко $n \geq N$.

Определение 2.12 Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е безкрайно голяма, ако $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$.

Пример 2.33 Нека е дадена редицата $a_n = n^2$. Докажете, че редицата a_n е безкрайно голяма и попълнете таблицата:

M	10	50	100	200	1000	3000	10000
N							

Нека $M > 0$ е произволно избрано. Трябва да изберем $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N$ да бъде изпълнено $n^2 > M$. Следователно, ако изберем $N = \lceil \sqrt{M} \rceil + 1$, то ще бъде изпълнено $n^2 > M$ за всяко $n \geq N$.

```

A := [10, 50, 100, 200, 1000, 3000, 10000];
s := numelems(A);
for i from 1 to s do B[i] := solve({n > 0, n^2 = A[i]}, n) end do;
[10, 50, 100, 200, 1000, 3000, 10000]
{n = sqrt(10)}
{n = 5*sqrt(2)}
{n = 10}
{n = 10*sqrt(2)}
{n = 10*sqrt(10)}
{n = 10*sqrt(30)}
{n = 100}

```

Командата *floor* в *Maple* дава цяла част от число.

```

seq(floor(eval(n, B[i])) + 1, i = 1..s);
4, 8, 11, 15, 32, 55, 101

```

M	10	50	100	200	1000	3000	10000
N	4	8	11	15	32	55	101

Пример 2.34 Нека е дадена редицата $b_n = \frac{1}{\log_2(n(n+1))}$. Докажете, че редицата b_n е безкрайно малка и попълнете таблицата:

ε	0.5	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
N									

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано. Трябва да изберем $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N$ да бъде изпълнено $\frac{1}{\log_2(n(n+1))} < \varepsilon$. Следователно ако изберем $N = \lceil 2^{1/2\varepsilon} \rceil + 1$, то ще бъде изпълнено $\frac{1}{\log_2(n(n+1))} < \varepsilon$ за всяко $n \geq N$.

```

A := [0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.002, 0.001]; s := numelems(A) :
for i from 1 to s do B[i] := solve  $\left( \left\{ n > 0, \frac{1}{2 \cdot \log_2(n)} = A[i] \right\}, n \right)$  end do;
[0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.002, 0.001]
{n = 2}
{n = 5.656854248}
{n = 32}
{n = 1024}
{n = 3.355443.107}
{n = 1.125899907.1015}
{n = 1.26765060.1030}
{n = 1.80925139.1075}
{n = 3.273390608.10150}
for i from 1 to s do floor(eval(n, B[i])) + 1 end do;

```

```

3
6
33
1025
33554433
11258999070000001
1.125899907.1015 + 1
1.2676506000000000.1030 + 1
1.80925139.1075 + 1
33.2733906080000000.10150 + 1

```

Твърдение 2.10 Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от положителни числа. Тогава:

- 1) Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$;
- 2) Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Доказателство: 1) Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Ще покажем, че за произволно $M > 0$ съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $\frac{1}{a_n} > M$ за всяко $n \geq N$. За произволно $M > 0$, нека положим $\varepsilon = 1/M$. От $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N$ е изпълнено $0 < a_n < \varepsilon = 1/M$, т.е. $a_n > M$.

2) Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Нека $\varepsilon > 0$. Полагаме $M = \frac{1}{\varepsilon}$. Съществува $N \in \mathbb{N}$, така че $a_n > M$ за всяко $n \geq N$ и следователно $0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$. □

Пример 2.35 За всяко $a \geq 0$ е в сила $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & 0 \leq a < 1 \end{cases}$.

Нека $a > 1$ и $M > 0$ са произволни. В сила е представянето:

$$a^n = [1 + (a - 1)]^n = 1 + \binom{n}{1}(a - 1) + \binom{n}{2}(a - 1)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(a - 1)^n > n(a - 1).$$

Тогава за всяко $n > \frac{M}{a - 1}$ е изпълнено $a^n > n(a - 1) > M$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$.

Нека $0 < a < 1$. Да положим $b = 1/a > 1$. Тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = +\infty$ и съгласно Твърдение 2.10 получаваме $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1/a)^n} = 0$.

За $a = 1$ и $a = 0$ твърдението е очевидно.

Пример 2.36 Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{3^n - 2^{n-1}}$

От равенствата

$$\frac{2^n + 3^{n+1}}{3^n - 2^{n-1}} = \frac{3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n + 3 \right)}{3^n \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)}$$

и Пример 2.35 получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{n+1}}{3^n - 2^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^n + 3}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^n} = 3.$$

$$\text{limit} \left(\frac{2^n + 3^{n+1}}{3^n - 2^{n-1}}, n = \text{infinity} \right);$$

3

Пример 2.37 За всяко $a > 0$ е в сила $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

1) Нека $a \geq 1$. Тогава $\sqrt[n]{a} \geq 1$. Полагаме $\sqrt[n]{a} = 1 + \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \geq 0$. Получаваме $a = (1 + \varepsilon_n)^n \geq 1 + n\varepsilon_n$ и следователно $0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{a - 1}{n}$. Тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

2) Нека $0 < a < 1$. Полагаме $b = \sqrt[n]{1/a}$ и от равенството $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}}$ получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/a}} = 1.$$

Твърдение 2.11 Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от отрицателни числа. Тогава:

- 1) Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$;
- 2) Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Следствие 2.2 Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от числа. Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е безкрайно голяма тогава и само тогава, когато редицата $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е безкрайно малка.

Пример 2.38 Докажете, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = 0$ за всяко $a > 1$ и $k > 0$

Пример 2.39 Докажете, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Ясно е, че $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Нека положим $\sqrt[n]{n} = 1 + \lambda$, където $\lambda > 0$. Съгласно Нютоновия бином

$$n = (1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \dots + \lambda^n > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2.$$

За $n > 2$ е вярно неравенството $n-1 > n/2$ и така получаваме

$$n > \lambda^2 \frac{n^2}{4} = (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \frac{n^2}{4}.$$

Следователно $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt[n]{n}}$ и след граничен преход получаваме, че $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$.

ЗАДАЧИ:

1) Докажете, че следните редици са безкрайно големи и попълнете таблицата

M	10	50	100	200	1000	3000	10000
N							

а) $a_n = n^{\sqrt{2}}$; б) $a_n = (-1)^n \cdot n$; в) $a_n = \log_2(\log_2(n))$; г) $a_n = \frac{n!}{5^n}$; д) $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1}$.

2) Докажете, че следните редици са безкрайно малки и попълнете таблицата

ε	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001	0.00001
N						

а) $a_n = \frac{1}{n!}$; б) $a_n = \frac{n \cdot \log_2(n)}{2^n}$; в) $a_n = \frac{\log_2(n)}{n^2}$; г) $a_n = \frac{n^2 - 1}{n^3}$; д) $a_n = \frac{2n + 7}{n^2}$.

3) Покажете, че редицата $a_n = n^{(-1)^n}$ е неограничена, но не е безкрайно голяма.

4) Да се определи за кои $x \in \mathbb{R}$ редицата $a_n = \left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{1}{x^n}$ е ограничена.

5) Докажете, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

6) Да се намерят границите:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + 3 \cdot 5^n}{5^n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 6^n - 2 \cdot 3^n}{5 \cdot 6^n - 2^n}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n-1}}{3^{n+1} - 2^n}$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{3^n + 5 \cdot 4^n}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 3^n - 2 \cdot 5^n}{5 \cdot 2^n - 4^n + 5^n}$.

2.10 Неопределени изрази

Нека разгледаме редиците $a_n = 1/n^2$ и $b_n = 1/n$. Двете редици са сходящи към 0, затова не можем да приложим Теорема 2.4 за граница на частно. Лесно се вижда обаче, че $a_n/b_n = 1/n$ и следователно $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/a_n = +\infty$. В този случай забелязваме, че ако знаем само границите на редиците, без да знаем самите редици не можем да определим на колко е равна границата на тяхното частно. В случаи, когато не можем да определим границата на израз, само по граничните стойности на участващите редици, казваме че имаме неопределен израз или неопределеност. В тези случаи говорим за неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Да разгледаме редиците $x_n = (2 + (-1)^n)n$ и $y_n = n$. Тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/y_n$ не съществува. В тези случаи говорим за неопределеност от вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Друг вид неопределеност, който се появява, ще илюстрираме със следния пример: ако $x_n = \frac{1}{n^2}$ и $y_n = n$, за $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n$ имаме неопределеност от вида $[0 \cdot \infty]$.

Ако разгледаме $x_n = \sqrt{n+1}$ и $y_n = \sqrt{n}$, тогава за границата $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n)$ имаме неопределеност от вида $[\infty - \infty]$.

Пример 2.40 Намерете границите

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Решение: От равенствата

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}$$

получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{n^{1/2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} = \infty$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{1}{n^{1/2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right);$$

$$\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right);$$

$$\frac{1}{2}.$$

ЗАДАЧИ:

1) Намерете границите:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}; \text{ б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n^2}}; \text{ в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{1 - n^3} + n \right);$$

$$\text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right); \text{ д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \right); \text{ е) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right);$$

2.11 Определение на числото e

Твърдение 2.12 Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ е растяща и ограничена.

Доказателство: В сила са равенствата:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n \dots (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

и аналогично

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right).$$

Сравнявайки почлено изразите, получени за a_n и a_{n+1} получаваме, че k -то събираемо, участващо в a_n е по-малко от k -то събираемо, участващо в a_{n+1} и разбира се, a_{n+1} има едно събираемо повече от a_n . Наистина за $k = 2, 3, \dots, n$ е в сила неравенството

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

Следователно редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща.

Лесно се съобразява верността на неравенствата:

$$a_n < 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 3.$$

Така получаваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена. Съгласно Теорема 2.1 редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. \square

Границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ означаваме с e и се нарича неперово число. Означението e е въведено от Ойлер. Нарича се „неперово число“ на името на Непер, който изследва логаритми с основа близка до числото e . То приблизително е равно на 2.71828182846. С помощта на *Maple* да запишем няколко приближени стойности на e

$$\text{evalf}\left(\text{seq}\left(\left(1 + \frac{1}{10i+1}\right)^{10i+1}, i = 0..12\right), 5\right);$$

2, 2.6042, 2.6563, 2.6757, 2.6859, 2.6921, 2.6963, 2.6994, 2.7017, 2.7035, 2.7049, 2.7061, 2.7071

Лесно се вижда, че редицата $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ бавно се приближава към границата си ($a_{121} = 2.7071$).

Теорема 2.5 Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица, удовлетворяваща $a_n \neq 0$, $a_n \neq -1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. Тогава

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Доказателство: 1) Първо ще разгледаме случая, когато $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Без ограничаване на общността, можем да считаме, че $a_n \geq 1$.

Означаваме с $\alpha_n = [a_n]$ – най-голямото цяло число, ненадминаващо a_n . От неравенствата $\alpha_n \leq a_n \leq \alpha_n + 1$ получаваме

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n + 1}.$$

Редицата $\left\{\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ е подредица на $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ и следователно е сходяща към e . Тогава от равенствата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right) = e$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{\alpha_n + 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n + 1}\right)^{-1} = e$$

и от Лемата за двамата полицаи следва, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

2) Сега да разгледаме случая, когато $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Без ограничаване на общността, можем да считаме, че $a_n \leq -2$.

Полагаме $b_n = -a_n$ и получаваме

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \left(1 - \frac{1}{b_n}\right)^{-b_n} = \left(\frac{b_n}{b_n - 1}\right)^{b_n} = \left(1 + \frac{1}{b_n - 1}\right)^{b_n}.$$

Използвайки доказаното в първия случай, получаваме $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Нека сега редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна. Можем да я разбием на две подредици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, състоящи се от нейните положителни и отрицателни елементи. Докажем, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e.$$

Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, така че

$$\left|\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} - e\right| < \varepsilon \quad \text{за всяко } n \geq N_1$$

и

$$\left|\left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} - e\right| < \varepsilon \quad \text{за всяко } n \geq N_2.$$

Тогава за всяко $N = \max\{N_1, N_2\}$ получаваме

$$\left|\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} - e\right| < \varepsilon \quad \text{за всяко } n \geq N.$$

□

Следствие 2.3 За всяко $k \in \mathbb{Z}$ е в сила равенството:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

Пример 2.41 Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right)^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \left(\frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{-1} = \frac{e^2}{e^1} = \frac{1}{e}.$$

Пример 2.42 Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+5n+6}{n^2-n-2}\right)^{n-1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+5n+6}{n^2-n-2}\right)^{n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n-2)}\right)^{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{n-1} = e^1 \cdot e^5 = e^6. \end{aligned}$$

Пример 2.43 Докажете $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.

Нека положим $b_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. От неравенствата: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < b_n < 3$, и $b_n < b_{n+1}$ получаваме, че съществува $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq e$. От друга страна за всяко $m > n$ е в сила

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{m}\right).$$

След граничен преход при $m \rightarrow \infty$ получаваме

$$e = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq 1 + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{m}\right) = b_n.$$

*evalf (seq (1 + sum (1/i!, i = 1..10 * n + 1), n = 0..12), 50);*

2.,
2.7182818261984928651595318261984928651595318261985,
2.7182818284590452353593574317298071473772510089138,
2.7182818284590452353602874713526624938382062863353,
2.7182818284590452353602874713526624977572470937000,
2.7182818284590452353602874713526624977572470937000,
.....
2.7182818284590452353602874713526624977572470937000,

Дефиницията на числото e от Пример 2.43 дава възможност за по-лесното му приближено пресмятане. Лесно се съобразява верността на неравенството $0 < e - b_n$.

Ще разгледаме разликата $b_{n+p} - b_n$:

$$\begin{aligned} b_{n+p} - b_n &= \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k!} \\ (5) \quad &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2) \dots (n+p)}\right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{p-1}}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1 - \frac{1}{(n+2)^p}}{1 - \frac{1}{n+2}} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} \leq \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

Неравенството (5) е изпълнено за всяко $p \geq 1$ и следователно $b_n < e < b_n + \frac{1}{n!n}$.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано. Тогава съществува $N \in \mathbb{N}$, такова че $\frac{1}{N!N} < \varepsilon$ и следователно

$$\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} + \frac{1}{N!N}$$

Пример 2.44 Намерете с точност $\varepsilon = 0.001$, $\varepsilon = 0.00001$ и $\varepsilon = 0.000000001$ числото e .

Ще пресметнем стойностите на $\frac{1}{n!n}$ за $n \in [1, 12]$.

for n to 12 do

evalf $\left(\frac{1}{\text{factorial}(n) \cdot n} \right)$

end do;

1

0.250000000000

0.05555555555556

0.01041666666667

0.00166666666667

0.000231481481481

0.0000283446712018

0.00000310019841270

3.0619243582210^{-7}

2.7557319224010^{-8}

2.2774643986810^{-9}

1.7397297489910^{-10} .

Следователно за точност $\varepsilon = 0.001$ е необходимо да вземем $n = 6$, за точност $\varepsilon = 0.00001$ е необходимо да вземем $n = 8$, за точност $\varepsilon = 0.000000001$ е необходимо да вземем $n = 12$. Нека да отбележим, че (5) дава доста груба оценка за приближеното пресмятане на e , защото заменяме сумата в (5) със сума на геометрична прогресия.

$$\begin{aligned} 2.7180 &= \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} + \frac{1}{6!.6} = 2.7182 \\ 2.71827 &= \sum_{k=0}^8 \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^8 \frac{1}{k!} + \frac{1}{8!.8} = 2.71828 \\ 2.7182818283 &= \sum_{k=0}^{12} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{12} \frac{1}{k!} + \frac{1}{12!.12} = 2.7182818285. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ:

1. Намерете

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n+2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+2} \right)^{n+1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+3} \right)^{n-2}$.

2. Намерете

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4n+3}{n^2+3n+2} \right)^{n+1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-2n-8}{n^2+2n-3} \right)^{n-1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-7n+12}{n^2+5n+6} \right)^{n+3}$.

3. Намерете с точност $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.005$, $\varepsilon = 0.0000000001$, $\varepsilon = 0.00000000005$ и $\varepsilon = 0.00000000002$ числото e .

3 Функции

До понятието функция се достига, ако се изучават стойности, които имат връзка помежду си. Може да се случи две стойности да са свързани, така че за всяка стойност на единия параметър да отговаря точно определена стойност на другия параметър. При наличие на такава зависимост казваме, че втората променлива се явява функция на първата променлива. Нека да разгледаме лицето S на кръг с радиус r . Добре известна е формулата $S = \pi r^2$. Правилото, което свързва лицето на кръга с неговия радиус задава функцията $S(r) = \pi r^2$. Множеството от стойностите на променливата r се нарича дефиниционна област на функцията S . Множеството от стойностите, които може да приема функцията $S(r)$ се нарича област от стойности на функцията S .

3.1 Основни понятия

Нека са дадени две множества X и Y . Казваме, че е зададена функцията $f : X \rightarrow Y$, ако на всяко $x \in X$ се съпоставя единствено $y = f(x) \in Y$. При задаване на всяка функция се отчитат следните три съществени момента: областта X , където е дефинирана функцията f , областта от стойностите Y и правилото на съответствие между елементите на X и Y . Ние ще разглеждаме функции, които на всяко число от някое подмножество на реалните числа съпоставят реално число $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$.

Пример 3.1 Лицето на кръга S зависи от радиуса му r чрез формулата $S(r) = \pi r^2$.

Тук $X = Y = [0, +\infty)$.

Пример 3.2 Законът за свободно падане на тяло при липса на съпротивление е $s(t) = \frac{gt^2}{2}$, където $g \approx 9.81$ е силата на привличане на земята, t е времето измерено в секунди, а $s(t)$ е изминатият път.

Пример 3.3 Нека да разгледаме газ, който се намира в цилиндър. Законът на Бойл–Мариот казва, че $pV = c$, където V е обемът, p –налягането, а c е константа.

Пример 3.4 Формулата за налягането на въздуха на височина h от морското равнище е $p(h) = p_0 e^{-kh}$, където p_0 е налягането на въздуха на морското равнище, k е константа, а h е височината.

Уредите на самолетите отчитат височината, на която се намира самолетът с формулата $h = \frac{1}{k} \ln \frac{p_0}{p}$.

Множеството $X \subseteq \mathbb{R}$ може да бъде произволно. Пример на функция, която сме разглеждали до момента са числовите редици. Там функцията f съпоставя на всяко естествено число реалното число ($f(n) = a_n$), т.е. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, като $X = \mathbb{N}$ и $Y = \mathbb{R}$.

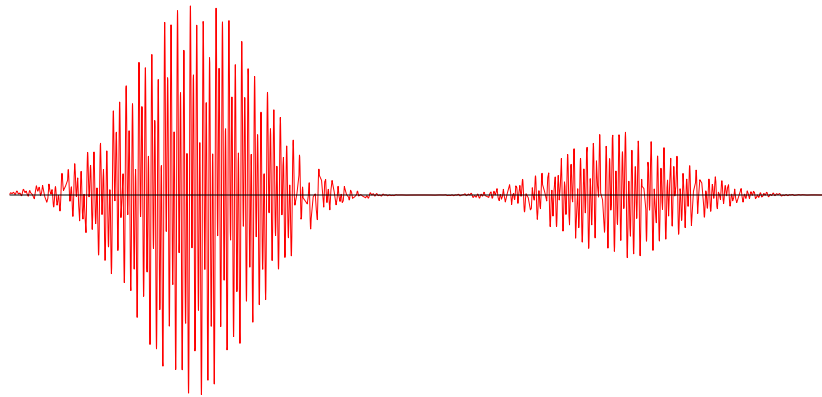
Нека е дефинирана функция $f : X \rightarrow Y$. Стойността ѝ в произволна точка $x_0 \in X$ записваме като $f(x_0)$. Например лицето на кръг с радиус 2 е равен на $S(2) = \pi 2^2$, пътят изминат при свободно падане за 10 sec е равен на $s(10) = \frac{g \cdot 10^2}{2}$, налягането на 1200 метра е $p(1200) = p_0 e^{-k \cdot 1200}$.

Не всички функции могат да се зададат чрез формула. Например функцията $f(x) = [x] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, която съпоставя на всяко реално число най-голямото цяло число $p \leq x$ се нарича цяла част от число. Някои от стойностите на функцията цяла част са $[1] = 1$, $[3, 2] = 3$, $[-\pi] = -4$. Друг такъв пример е функцията $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, която на всяко число n съпоставя броя делители на n . Някои от стойностите на функцията τ са $\tau(10) = 4$, $\tau(12) = 6$, $\tau(16) = 5$.

В естествените науки и техническите науки често зависимостите се получават с помощта на експерименти и тогава говорим за таблично задаване на функция. Нека да разгледаме таблица, която дава връзка между температурата и растежа в сантиметри на бамбука:

Температура в C°	18	22	24	26	30
Скорост на растежа на бамбука в см на ден	1	2	12	24	10

Възможно е функцията да се дефинира и директно чрез своята графика - измерване на вертикалното ускорение при земетресение (Фиг. 24) или измерване на променлив ток.



Фигура 24: Вертикалното ускорение при земетресение

Основният интерес към изучаване свойствата на функциите $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е продиктуван от възможността чрез тях да се описват модели на зависимости в природата.

В математическия анализ функциите не се задават графично, но винаги се прибегва до илюстрация на функциите чрез графика. Лесното визуализиране на свойствата на функцията чрез графичното ѝ изобразяване прави графиката много удобно средство за изследване на свойствата на функциите.

Нека $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$ и да разгледаме правоъгълна декартова координатна система Oxy . На всяка наредена двойка (x_0, y_0) , където $y_0 = f(x_0)$, можем да съпоставим точката $M(x_0, y_0)$ от равнината Oxy . Когато променливата x пробягва всички стойности от дефиниционната област, променливата y пробягва областта от стойности на функцията f и описва някаква крива, която наричаме графика на функцията f .

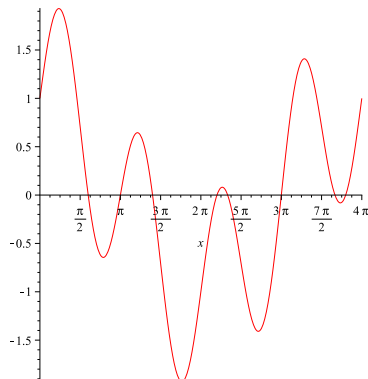
Математическите софтуери дават възможност за изчертаване на графика на функция.

Командата `plot` в Maple дава възможност да се изчертава графиката на функция. `plot(expr, x = a..b, opts);`

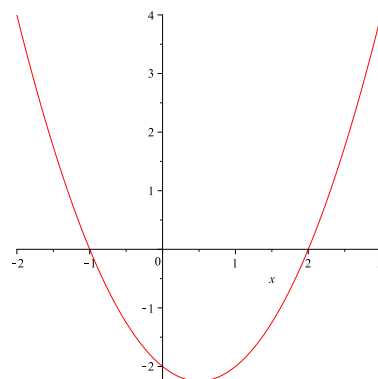
`plot([expr1, expr2], x = a..b, opts);`

`plot($x^2 - x - 2$, $x = -2..3$)`

`plot($\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin(2 \cdot x)$, $x = 0..4 \cdot \pi$);`



Фигура 26: График на функцията $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin(2x)$



Фигура 25: График на функцията $f(x) = x^2 - x - 2$

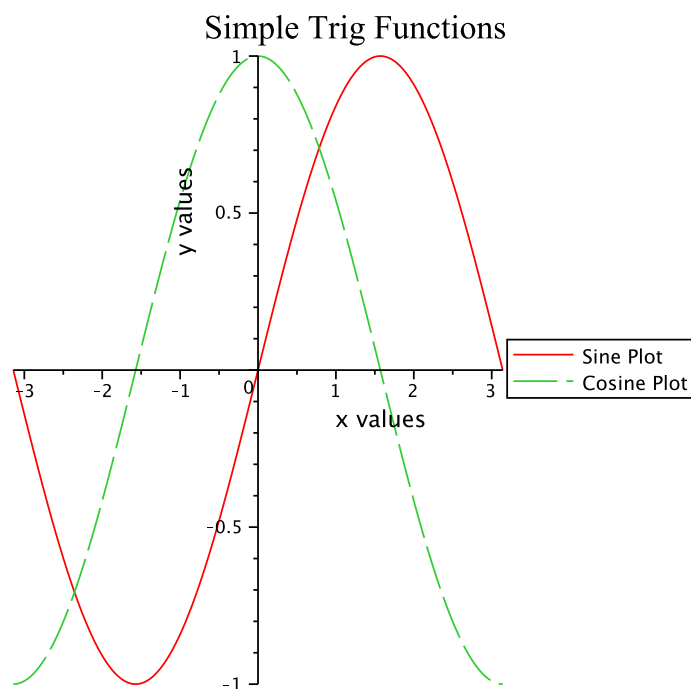
`plot([sin, cos], -Pi..Pi, title = "SimpleTrigFunctions legend = ["SinePlot" , "CosinePlot"], titlefont = ["ROMAN" , 15], labels = ["xvalues" , "yvalues"], labeldirections = ["horizontal" , "vertical"], labelfont = ["HELVETICA" , 10], linestyle = [solid , longdash], axesfont = ["HELVETICA" , "ROMAN" , 8], legendstyle = [font = ["HELVETICA" , 9], location = right]);`

3.2 Аналитично дефиниране на функция

Една функция може да се зададе чрез описание, чрез таблица, чрез графика и чрез формула.

Дефинирането на функция аналитично или чрез формула играе важна роля в математическия анализ. Действието, които можем да включим във формулата при аналитично дефиниране на функция аналитично са добре известните аритметични действия, повдигане на степен, коренуване, логаритмуване. В хода на лекционния курс ще добавяме и други действия, като граничен преход, диференциране, интегриране и т.н. Всяка формула съдържа променливата x и дефиниционната област на функцията се определя за тези променливи x , за които формулата има смисъл.

Пример 3.5 Нека е дефинирана функцията $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.



Фигура 27: Графика на функциите $\cos x$ и $\sin x$

Дефиниционната област на функцията f се определя от това, че коренуване (при четен коренен показател) е допустимо само за неотрицателни числа и не може да се дели на нула. Следователно $1 - x^2 > 0$. Така получаваме дефиниционната област $x \in (-1, 1)$.

Пример 3.6 Нека е дефинирана функцията $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$.

Ако $|x| < 1$, то функцията f е коректно дефинирана. Ако $|x| \geq 1$, то или $f(x) = +\infty$ или сумата не съществува.

Друго ограничение при определяне на дефиниционната област диктува и моделът, който описва функцията. Например при свободно падане на материална точка от височина h формулата за изминатия е път $s(t) = \frac{g \cdot t^2}{2}$. Естествени ограничения за променливата t са $t \in \left[0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

Възможен е и случай, в който функцията се дефинира с повече от една формула. Например

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Функцията sign е въведена от Кронекер (Kronecker).

ЗАДАЧИ:

1) Намерете дефиниционната област на f :

а) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$; б) $f(x) = \sqrt{3x-x^3}$; в) $f(x) = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

г) $\sqrt{\sin(\sqrt{x})}$; д) $\sqrt{\sin(2x)} + \sqrt{\sin(3x)}$; е) $f(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x))$.

2) Намерете областта от стойности на $f: (0, 1) \rightarrow Y$:

а) $f(x) = a + (b-a)x$; б) $f(x) = \frac{1}{1-x}$; в) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$.

3) Пресметнете:

а) $f(0), f(1), f(2), f(3)$ за $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$;

б) $f(-1), f(0,001), f(100)$ за $f(x) = \lg x$;

в) $f(0,9), f(0,99), f(1), f(1,999)$ за $f(x) = 1 + [x]$;

г) $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ за $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \in (-\infty, 0] \\ 2^x & x \in (0, +\infty). \end{cases}$

3) Намерете стойностите на x за които $f(x) = 0, f(x) > 0, f(x) < 0$:

а) $f(x) = x - x^3$; б) $f(x) = (x + |x|)(1 - x)$; в) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$.

3.3 Основни класове функции

1) Полиноми:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0,$$

където $a_k \in \mathbb{R}$ за всяко $k = 0, 1, \dots, n$ (Фиг. 28).

$\text{plot}(x^4 - 15 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 24, x = -4..4.5);$

Ще изчертаем графиките на функциите $\frac{1}{4}x^2, \frac{1}{2}x^2, x^2, 2x^2, 4x^2$.

$\text{plot}\left(\left\{\frac{1}{4}x^2, \frac{1}{2}x^2, x^2, 2x^2, 4x^2\right\}, x = -2..2\right);$

2) Дробна рационална функция:

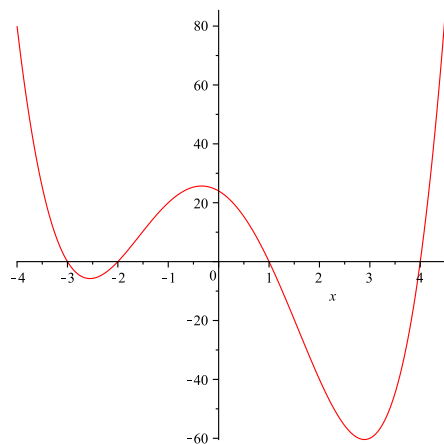
$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0},$$

където $a_k, b_j \in \mathbb{R}$ за всяко $k = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, m$.

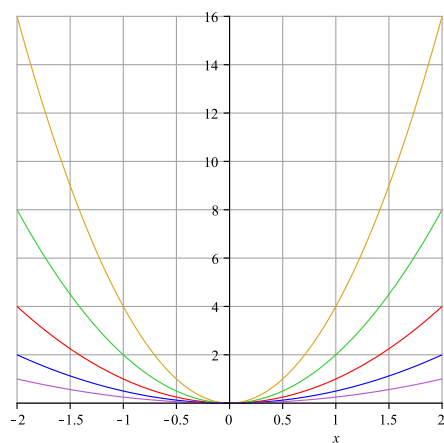
$\text{plot}\left(\left\{\frac{x^3-1}{x^2+1}, x - \frac{1}{6}x^3\right\}, x = -3..3, color = [red, blue], style = [point, line]\right)$

3) Степенна функция:

$$f(x) = x^\alpha,$$



Фигура 28: Графика на функциите $x^4 - 15x^2 - 10x + 24$



Фигура 29: Графики на функциите $a \cdot x^2$ при $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$

където $\alpha \in \mathbb{R}$. Ако $\alpha \in \mathbb{Z}$, то се получава рационална функция. Ако $\alpha = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, то се получава функцията $f(x) = x^{1/m} = \sqrt[m]{x}$. Тази функция е дефинирана за всички реални числа, ако m е нечетно число и е дефинирана за всички неотрицателни числа за m – четно.

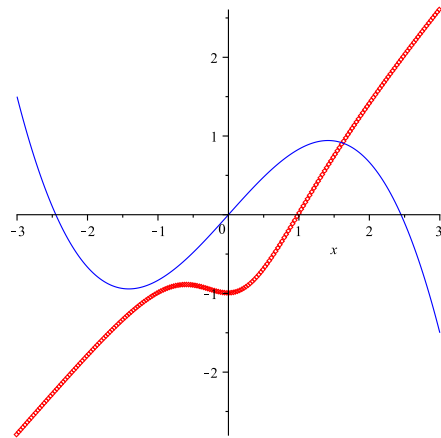
$\text{plot} \left(\left[x^5, x^4, x^2, x, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{4}}, x^{\frac{1}{5}} \right], x = 0..1.4 \right);$

$\text{plot} \left(\left[x^{-3}, x^{-2}, x, x^{-\frac{1}{2}}, x^{-\frac{1}{3}} \right], x = 0..2, y = 0..10, \text{discont} = \text{true} \right);$

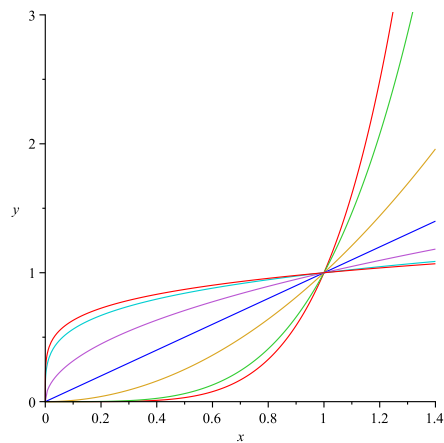
4) Показателна функция:

$$f(x) = \alpha^x,$$

където $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$.



Фигура 30: Графика на функциите $\frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ и $x - \frac{x}{6}$



Фигура 31: Графика на функциите $x^5, x^4, x^2, x, x^{1/2}, x^{1/3}, x^{1/5}$

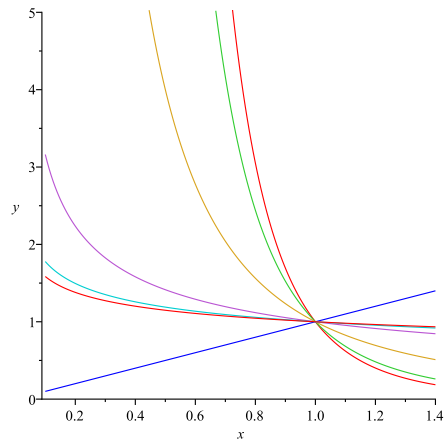
plot ($\{3^x, 2^x, 1^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x\}, x = -3..3,$
color = [red, red, blue, blue], *style* = [point, point, line, line], *symbol* = [circle, point]);

5) Логаритмична функция:

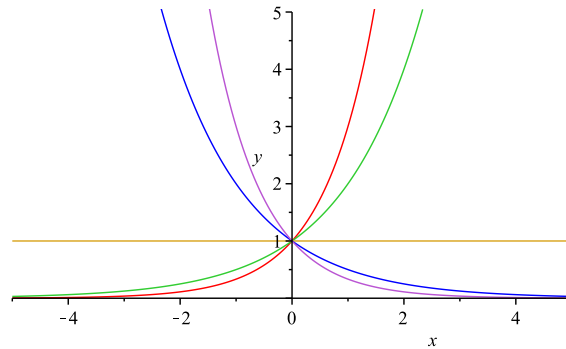
$$f(x) = \log_a x,$$

където $\alpha > 0$ и $a \neq 1$.

plot ($[\log_2(x), \log_4(x), \log_{1/4}(x), \log_{1/2}(x)], x = 0..10, y = -5..5, \text{discont} = \text{true}$);



Фигура 32: Графика на функциите $x^{-3}, x^{-2}, x, x^{-1/2}, x^{-1/3}$



Фигура 33: Графика на функциите $3^x, 2^x, 1^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x, \left(\frac{1}{3}\right)^x$

5) Тригонометрични функции:

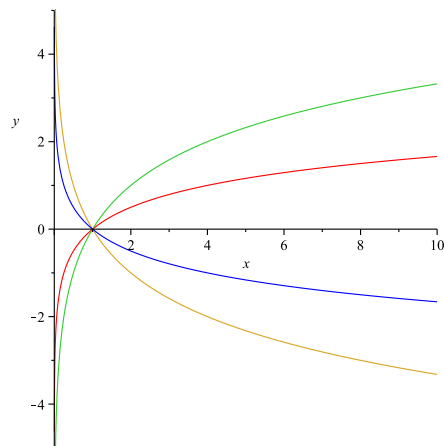
$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(x) = \operatorname{cotg} x.$$

Нека да уточним, че променливите на тригонометричните функции се изразяват в радиани. Функцията tg има дефиниционна област $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Функцията cotg има дефиниционна област $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

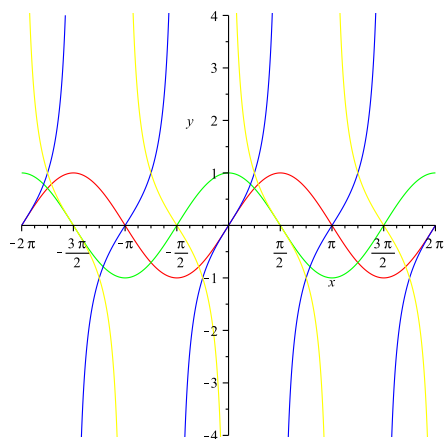
*plot([sin(x), cos(x), tan(x), cot(x)], x = -2Pi..2Pi, y = -4..4,
discont = true, color = [red, green, blue, yellow])*

ЗАДАЧИ:

1) Начертайте графиките на функциите:



Фигура 34: Графика на функциите $\log_2(x)$, $\log_4(x)$, $\log_{1/4}(x)$, $\log_{1/2}(x)$



Фигура 35: Графика на функциите $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\operatorname{ctg}(x)$

- а) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$; б) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 5$; в) $f(x) = 3(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + (x+1)$;
 г) $f(x) = 3(x-2)^3 + 2(x-2)^2 + (x-2)$;
 д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\sqrt[3]{x} - 1$; ж) $\sqrt[3]{x+2}$; з) $\sqrt[3]{x-1} + 1$;
 и) $3^x - 2^{x^2}$; й) $3^{x+2} - 2^{(x+2)^2}$; к) $3^x - 2^{x^2} + 1$; л) $3^{(x-1)} - 2^{(x-1)^2}$.

3) Начертайте графиките на функциите:

- а) $f(x) = \sin(x)$; б) $f(x) = \sin(2x)$; в) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
 г) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$; д) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{4}\right)$;

е) $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$; ж) $f(x) = \sin(3x) + \operatorname{tg}(3x)$; з) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$;

и) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3.4 Обратни функции

Нека функцията $f : X \rightarrow Y$ удовлетворява условието: за всяко $y_0 \in Y$ съществува единствено $x_0 \in X$, така че $f(x_0) = y_0$. Изображението $g : Y \rightarrow X$, дефинирано по този начин, наричаме обратна функция на f и означаваме с f^{-1} .

Пример за обратна функция е $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Да разгледаме функцията $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. За всяко $y_0 \in \mathbb{R}$ съществува единствено $x_0 \in \mathbb{R}$, така че $x_0^3 = y_0$. Лесно се съобразява, че $x_0 = \sqrt[3]{y_0}$. Следователно обратната функция на функцията $f(x) = x^3$ е функцията $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$. Нека да разгледаме функцията $f(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$. За всяко $y_0 \in [0, +\infty)$ съществуват две $x_0 \in \mathbb{R}$, така че $x_0^2 = y_0$. Нека да потърсим $x_0 \in [0, +\infty)$. Лесно се съобразява, че $x_0 = \sqrt{y_0}$. Следователно обратната функция на функцията $f(x) = x^2$ е функцията $f^{-1}(y) = \sqrt{y} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$.

Друг пример за обратна функция е $g(x) = \log_a(x)$. Нека да разгледаме функцията $f(x) = a^x : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$. За всяко $y_0 \in [0, +\infty)$ съществува единствено $x_0 \in \mathbb{R}$, така че $a^{x_0} = y_0$. Лесно се съобразява, че $x_0 = \log_a(y_0)$. Следователно обратната функция на функцията $f(x) = a^x$ е функцията $f^{-1}(y) = \log_a(y)$.

По-сложен пример е обратната функция f^{-1} на функцията $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$. Функцията се получава, като решение на уравнението $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$, което е еквивалентно на

$$(6) \quad e^{2x} - 2y \cdot e^x + 1 = 0.$$

След полагане $u = e^x$ получаваме, че $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Разглеждаме решенията на уравнението (6) само за $x \geq 1$. Тогава получаваме $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Лесно се съобразява, че ако имаме графиката на функцията f , то графиката на нейната обратна функция f^{-1} е симетрична относно правата $y = x$.

Maple дава възможност за изчертаване на обратните функции.

with(Student[Calculus1]);

InversePlot(x^3, -1..1, legendstyle = [font = ["HELVETICA 16"], font = [TIMES, 16]]);

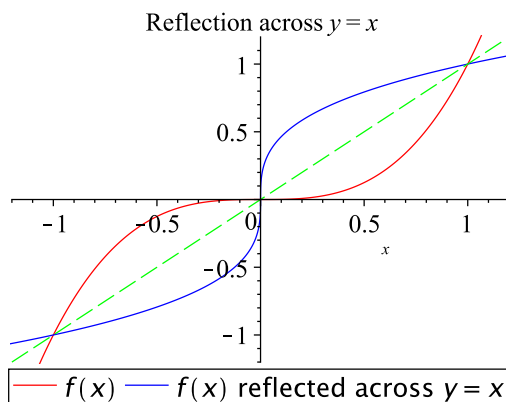
InversePlot(x^2, -1..1);

InversePlot(exp(x), -1..1);

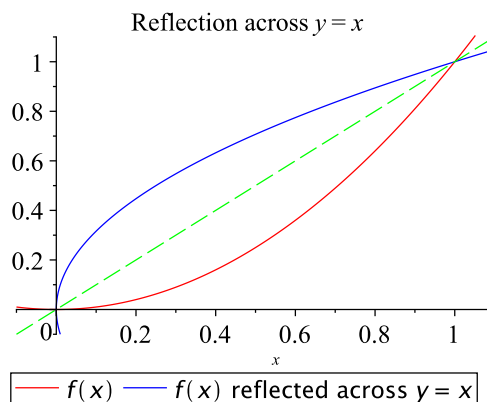
InversePlot\left(\frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}, -2..2\right);

Обратните тригонометрични функции се означават с $\arcsin x = \sin^{-1} x$, $\arccos x = \cos^{-1} x$, $\arctg x = \operatorname{tg}^{-1} x$, $\operatorname{arcctg} x = \operatorname{cotg}^{-1} x$.

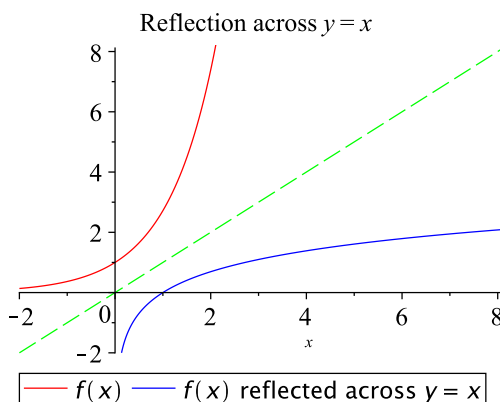
Уравнението $\sin x = y$ има единствено решение за $y \in [-1, 1]$, когато $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



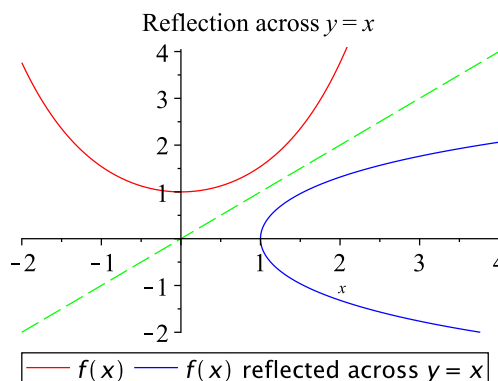
On the interval $[-1, 1]$, a graph of $f(x) = x^3$, the line $y = x$, and the reflection of $f(x)$ across the line $y = x$.



On the interval $[0, 1]$, a graph of $f(x) = x^2$, the line $y = x$, and the reflection of $f(x)$ across the line $y = x$.



On the interval $[-2, 2]$, a graph of $f(x) = e^x$, the line $y = x$, and the reflection of $f(x)$ across the line $y = x$.



On the interval $[-2, 2]$, a graph of $f(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, the line $y = x$, and the reflection of $f(x)$ across the line $y = x$.

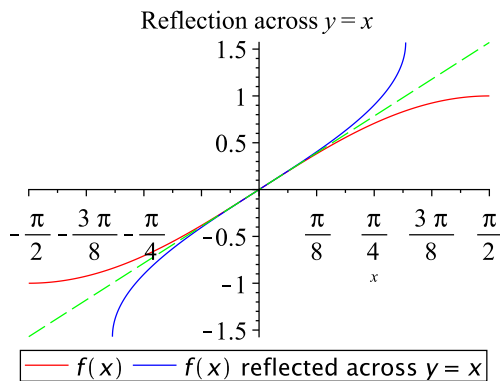
Тези решения дефинират функцията $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Уравнението $\cos x = y$ има единствено решение за $y \in [-1, 1]$, когато $x \in [0, \pi]$. Тези решения дефинират функцията $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

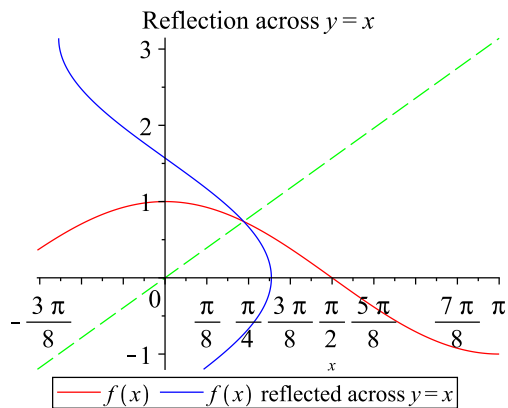
Уравнението $\operatorname{tg} x = y$ има единствено решение за $y \in (-\infty, +\infty)$, когато $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тези решения дефинират функцията $\operatorname{arctg} : (-\infty, +\infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Уравнението $\operatorname{cotg} x = y$ има единствено решение за $y \in (-\infty, +\infty)$, когато $x \in (0, \pi)$. Тези решения дефинират функцията $\operatorname{arcctg} : (-\infty, +\infty) \rightarrow (0, \pi)$.

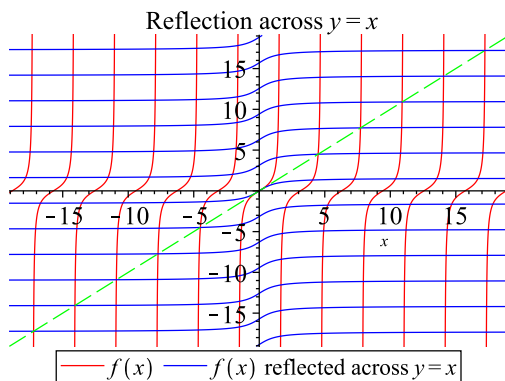
Пример 3.7 Пресметнете $\arcsin(1/2)$, $\operatorname{tg}(\arcsin(1/\sqrt{2}))$, $\operatorname{tg}(\arcsin(1/3))$



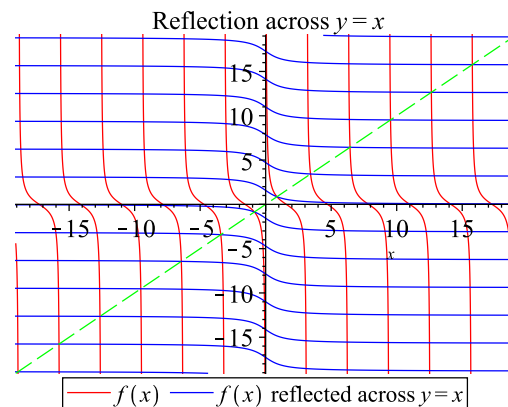
On the interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$, a graph of $f(x) = \sin(x)$, the line $y = x$, and the reflection of $f(x)$ across the line $y = x$.



On the interval $[0, \pi]$, a graph of $f(x) = \cos(x)$, the line $y = x$, and the reflection of $f(x)$ across the line $y = x$.



On the interval $\left[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$, a graph of $f(x) = \tan(x)$, the line $y = x$, and the reflection of $f(x)$ across the line $y = x$.



On the interval $[0, \pi]$, a graph of $f(x) = \cot(x)$, the line $y = x$, and the reflection of $f(x)$ across the line $y = x$.

По дефиниция $\arcsin(1/2)$ е решението на уравнението $\sin \alpha = 1/2$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Следователно $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

По дефиниция $\arcsin(1/\sqrt{2})$ е решението на уравнението $\sin \alpha = 1/\sqrt{2}$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Следователно $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Така получаваме $\operatorname{tg}(\arcsin(1/\sqrt{2})) = \operatorname{tg}(\pi/4) = 1$.

По дефиниция $\arcsin(1/3)$ е решението на уравнението $\sin \alpha = 1/3$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогава $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Така получаваме $\operatorname{tg}(\arcsin(1/3)) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

ЗАДАЧИ

1) Определете дали съществува обратна функция на f

а) $f(x) = x^2 - x$; б) $f(x) = 1/x$;

2) Намерете $f^{-1}(x)$, ако

а) $f(x) = 1 + \sqrt{2 + 3x}$; б) $f(x) = \frac{4x - 1}{2x + 3}$; в) $f(x) = e^{2x-1}$;

г) $f(x) = x^2 - x$, $x \geq 1/2$; д) $f(x) = \ln(x + 3)$; е) $f(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x}$;

3.5 Съставна функция

Съставна функция или сложна функция се получава, когато при пресмятанията независимата променлива в едната функция се замества със стойностите на друга функция.

Пример 3.8 С помощта на функциите $f(x) = \ln x$ и $g(x) = \sin x$ можем да зададем две съставни функции $F(x) = \ln(\sin x)$ или $G(x) = \sin(\ln x)$.

Определение 3.1 Нека са дадени функциите $f : Y \rightarrow Z$ и $g : X \rightarrow Y$. Функцията $F : X \rightarrow Z$, дефинирана чрез $F(x) = f(g(x))$ наричаме съставна функция.

Използва се също и означението $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, което се чете f след g .

Трябва да отбележим, че при дефинирането на съставна функция е важно областта от стойностите на първата функция g , да е подмножество на дефиниционната област на втората функция f . Нека да разгледаме Пример 3.8. $f(x) = \ln x$ и $g(x) = \sin x$. За да има смисъл изразът $F(x) = \ln(\sin x)$ трябва $g(x) = \sin x : X \subset \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. Следователно $\sin x$ е дефинирана само в множеството $X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$. Ако разглеждаме функцията

$G(x) = \sin(\ln x)$, тъй като $\sin x$ е дефинирана за всяко реално число x , то не се налагат ограничения за дефиниционната област на $\ln x$.

Аналогично се дефинира съставна функция на повече от две функции. Ако $f_1 : X_1 \rightarrow X_2$, $f_2 : X_2 \rightarrow X_3$, $f_3 : X_3 \rightarrow X_4$, то $F(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$ е съставна функция.

Пример 3.9 Намерете $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$, $f(g(h(x)))$ и определете дефиниционните им области, ако $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \frac{x}{1-x}$.

От $f(g(x)) = \sqrt{\ln x}$ следва $g(x) = \ln x \geq 0$. Тогава $g : [1, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$.

От $g(f(x)) = \ln(\sqrt{x})$ следва $f(x) = \sqrt{x} > 0$. Тогава $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, \infty)$.

От $f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ следва $f(x) = \sqrt{x} \geq 0$. Тогава $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$.

От $g(g(x)) = \ln(\ln x)$ следва $g(x) = \ln x > 0$. Тогава $g : (1, +\infty) \rightarrow (0, \infty)$.

Дефиниционната област на съставната функция $f(g(h(x))) = \sqrt{\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)}$ се определя с условията

$$(7) \quad \left| \begin{array}{l} \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \geq 0 \\ \frac{x}{1+x} > 0. \end{array} \right.$$

Системата (7) е еквивалентна на

$$(8) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{x}{1+x} \geq 1 \\ \frac{x}{1+x} > 0. \end{array} \right.$$

Решението на системата (8) е $(-\infty, -1) \cap ((-\infty, -1) \cup (0, +\infty)) = (-\infty, -1)$. Следователно функцията $f(g(h(x))) = \sqrt{\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)}$ има дефиниционна област $(-\infty, -1)$.

Можем да решим неравенствата от система (8) с помощта на *Maple*.

solve $\left(\frac{x}{1+x} > 0, x\right);$

RealRange(*-infinity*, *Open*(-1)), *RealRange*(*Open*(0), *infinity*)

solve $\left(\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \geq 0, x\right);$

RealRange(*-infinity*, *Open*(-1))

Ако искаме да използваме командите *intersect* (сечение) и *union* (обединение) в *Maple*, трябва да укажем в командата *solve* променливата, спрямо която решаваме неравенството с фигуративни скоби $\{x\}$.

s1 := *solve* $\left(\frac{x}{1+x} > 0, \{x\}\right);$

$\{x < -1\}, \{0 < x\}$

s2 := *solve* $\left(\ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \geq 0, x\right);$

$\{x < -1\}$

s := *intersect* (*union* (*s1*[1], *s1*[2]), *s2*);

$\{x < -1\}$

В Математическия анализ често се налага съставна функция да се разбие на по-прости функции, които я генерират.

Пример 3.10 Нека $F(x) = \cos^2(\sqrt{x+1})$. Намерете елементарните функции, които генерират съставната функция F .

От записа

$$F(x) = \cos^2(\sqrt{x+1}) = \left(\cos(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

следва, че ако положим $f_1 := x^2$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3 := x^{1/2}$ и $f_4 := x + 1$, то $F(x) = f_1(f_2(f_3(f_4(x))))$.

ЗАДАЧИ

1) Намерете $f(g(x))$, $g(f(x))$, $f(f(x))$, $g(g(x))$ и определете дефиниционните им области, ако:

а) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $g(x) = \sin x$; б) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$;

в) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt[3]{1-x}$; г) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$;

2) Намерете $f(g(h(x)))$, $f(h(g(x)))$, $g(f(h(x)))$, $g(h(f(x)))$, $h(f(g(x)))$, $h(g(f(x)))$ и определете дефиниционните им области, ако:

а) $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = x^2$; б) $f(x) = |x - 4|$, $g(x) = 2^x$, $h(x) = \sqrt{x}$;

в) $f(x) = \sqrt{x-3}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3 + 2$; г) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$;

3) Намерете функции, които генерират функциите:

а) $f(x) = (2x + x^2)^4$; б) $f(x) = \cos^2 x$; в) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$;

г) $f(x) = \sqrt[7]{1 + |x|}$; д) $f(x) = \arcsin^4(\sqrt[3]{x})$; е) $f(x) = e^{\frac{\sin x}{1 + \sin x}}$.

4 Граница на функция

4.1 Определение за граница на функция по Хайне

Определение 4.1 (по Хайне) Казваме, че числото b е граница на функцията f в точката a – точка на съгъстване на дефиниционното множество на функцията, ако за всяка редица от точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, сходяща към a , то редицата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към b и записваме $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Хенрих Едуард Хайне (1821–1881) е немски математик, чл.-кор. на Берлинската академия на науките. Той е работил в университетите в Бон и Халле. Основно се е занимавал с теория на множествата, специални функции, функции на Лъожандър и математическа физика. Изследвал е хипергеометрични редове. Хайне е осмото дете в семейството. Той не посещава училище, а получава домашно образование. В университета негов учител е Дирихле. Научни ръководители на неговата дисертация са Ено Дирксен и Мартин Ом. Хайне посвещава дисертацията си на своя учител Дирихле. През 1877 по случай 100 годишнината от раждението на Гаус, Хайне е удостоен с мадал на Гаус.



Фигура 36: Heinrich Eduard Heine

Пример 4.1 Намерете $\lim_{x \rightarrow a} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ за $a = 6$ и $a = 1/2$.

За всяка редица $x_n \rightarrow 6$ е изпълнено $\lim_{n \rightarrow \infty} (4x_n^2 - 1) = 4 \cdot 6^2 - 1 = 143$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_n - 1) = 2 \cdot 6 - 1 = 11. \text{ Следователно } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{143}{11} = 13.$$

Функцията f не е дефинирана за $x = 1/2$, но е дефинирана за всяко $x \neq 1/2$. Тогава за всяка редица $x_n \rightarrow 1/2$, $x_n \neq 1/2$ е в сила представянето $\frac{4x_n^2 - 1}{2x_n - 1} = 2x_n + 1$. Следователно

$$\lim_{x_n \rightarrow 1/2} \frac{4x_n^2 - 1}{2x_n - 1} = \lim_{x_n \rightarrow 1/2} (2x_n + 1) = 2$$

Командата $\text{limit}(f, x = a)$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ в *Maple* може да се използва за намиране както на граница на редица, така и за намиране на граница на функция. Променливите в командата за граница са: f е израз, x е променливата, a е граничната стойност, която може да бъде число, израз или $\pm\infty$.

$$\text{limit}\left(\frac{4 \cdot x^2 - 1}{2 \cdot x - 1}, x = 6\right);$$

13.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4 \cdot x^2 - 1}{2 \cdot x - 1};$$

2.

Пример 4.2 Функцията $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ няма граница в точката 0.

Наистина нека вземем редицата $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi(n+1)}$. Ясно е, че $x_n \neq 0$ и редицата $\sin(1/x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi(n+1)\right) = (-1)^n$ няма граница.

$\text{limit}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right), x = 0\right);$

$-1..1$

$\text{limit}\left(\sin\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot \text{floor}(n)}\right), n = \text{infinity}\right);$

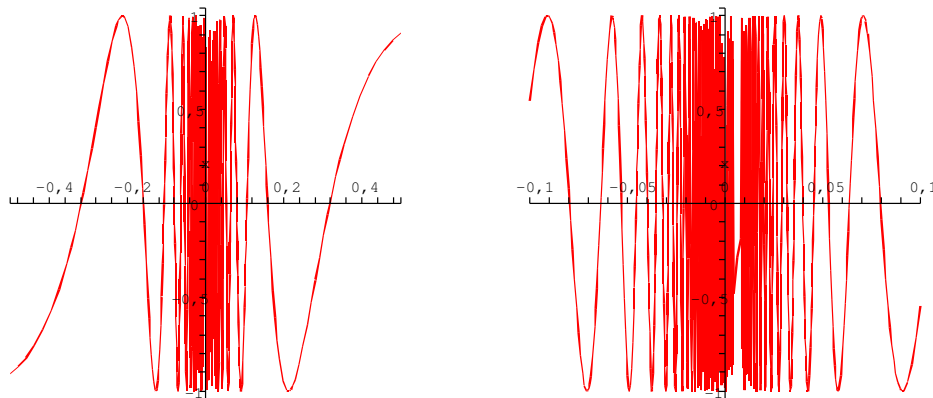
1

$\text{limit}\left(\sin\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi \cdot (2 \cdot \text{floor}(n) + 1)}\right), n = \text{infinity}\right);$

$-1,$

където функцията $\text{floor}(n)$ е цяла част от n .

Можем да визуализираме графично функцията $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ в *Maple*. От графиката (Фиг. 37) се вижда, че колкото и малка околност $(-\varepsilon, \varepsilon)$ на нулата да разглеждаме функцията приема всички стойности от интервала $[-1, 1]$.



Фигура 37: Графика на функцията $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Пример 4.3 Функцията $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ има граница 0 в точката 0.

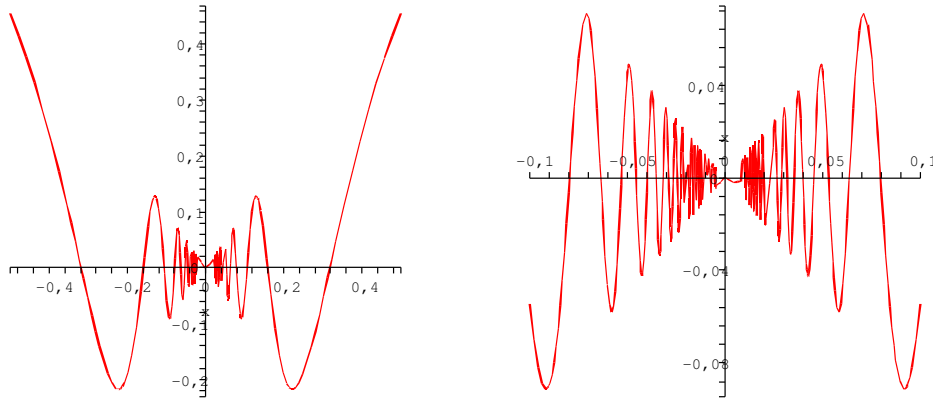
Наистина за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \neq 0$ са в сила неравенствата:

$$0 \leq \left| x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| \leq |x_n|.$$

От $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ получаваме, че $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \sin \frac{1}{x_n} = 0$ за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \neq 0$.

$\text{limit} \left(x \cdot \sin \left(\frac{1}{x} \right), x = 0 \right);$
0.

Можем да визуализираме графично функцията $x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$ в *Maple*. От графиката (Фиг. 38) се вижда, че колкото по-малка е околността на нулата $(-\varepsilon, \varepsilon)$, толкова функцията приема стойности по-близки до 0.



Фигура 38: Графика на функцията $x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$

Интуитивно понятието граница на функция в точката a означава, че съществува число b така, че когато променливата x се доближава до a , то функционалните стойности $f(x)$ се доближават до b .

Теорема 4.1 Нека функциите f и g имат обща дефиниционна област D и нека съществуват границите $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава е изпълнено:

- а) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \pm c$;
- б) $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x)) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha b$;
- в) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = b \cdot c$;
- г) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}$, при условие, че $c \neq 0$.

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от съответните свойства за граница на сходящи редици. Ще докажем свойство а). Нека редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, $x_n \in D$. По условие имаме: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = c$. Тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \pm \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = b \pm c$. \square

Теорема 4.2 Нека функциите f , g имат обща дефиниционна област D и нека за всяко $x \in D$ е в сила:

$$f(x) \leq g(x)$$

и съществуват границите $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Тогава $b \leq c$.

Доказателство: Нека редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, $x_n \in D$. По условие имаме за всяко $n \in \mathbb{N}$

$$f(x_n) \leq g(x_n)$$

и съгласно Лема 2.1 получаваме, че $b = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = c$. \square

Теорема 4.3 Нека функциите f , g и h имат обща дефиниционна област D и нека за всяко $x \in D$ е в сила:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$.

Доказателство: Нека редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, $x_n \in D$. По условие за всяко $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$$

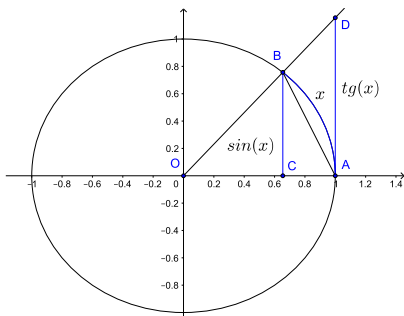
и съгласно Лема 2.2 получаваме, че $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$. \square

Теорема 4.4 Нека са дадени функциите $f : D \rightarrow U$ и $g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $f(x) \neq b$ за всяко $x \in D$, $x \neq a$ и $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, то $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$.

Доказателство: Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \neq a$ и $b_n = f(x_n) \neq b$. Тогава

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)).$$

\square



Фигура 39: $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$, x .

Пример 4.4 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

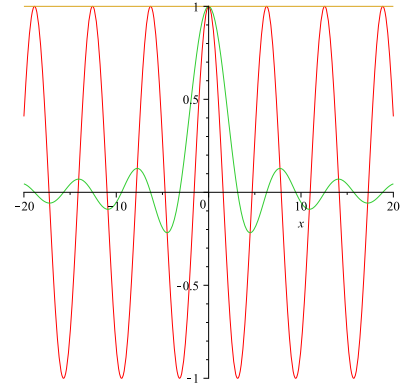
От Фиг. 39 сравнявайки лицата $S_{\triangle OAB}$ и $S_{\triangle OAD}$ за $x \in (0, \pi/2)$ получаваме

$$(9) \quad \begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2} |OA| \cdot |BC| \leq \frac{1}{2} |OA| \cdot x \\ &\leq \frac{1}{2} |OA| \cdot |AD| = S_{\triangle OAD}. \end{aligned}$$

Нека положим $|OA| = 1$. Тогава $|BC| = \sin x$ и $|AD| = \operatorname{tg} x$ и от (9) получаваме неравенството: $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$ за всяко $x \in (0, \pi/2)$. Използвайки, че $\sin(-x) = -\sin x$ и $\cos(-x) = \cos x$ получаваме $|\sin x| \leq |x|$ и $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ за $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна редица, клоняща към 0 и $x_n \neq 0$. От $|\sin(x_n)| \leq |x_n|$ следва $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n = 0$. От равенството $\cos(x) = 1 - 2\sin^2(x/2)$ и от Теорема 4.4 получаваме $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Накрая от $\cos(x_n) \leq \frac{\sin(x_n)}{x_n} \leq 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n = 1$ получаваме $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$.

Визуализираме графично функциите $\cos(x)$, $\frac{\sin x}{x}$ и 1 в Maple (Фиг. 40).



Фигура 40: Графики на функциите $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$, 1.

ЗАДАЧИ:

1) Намерете границите:

- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$; г) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$; е) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$.

2) Намерете границите:

- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(4x)}{\operatorname{tg}(3x)}$.

3) Намерете границите:

- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos(2x)}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3(x)}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^{2n}(x)}{\sin^2(x)}$, $n \in \mathbb{N}$.

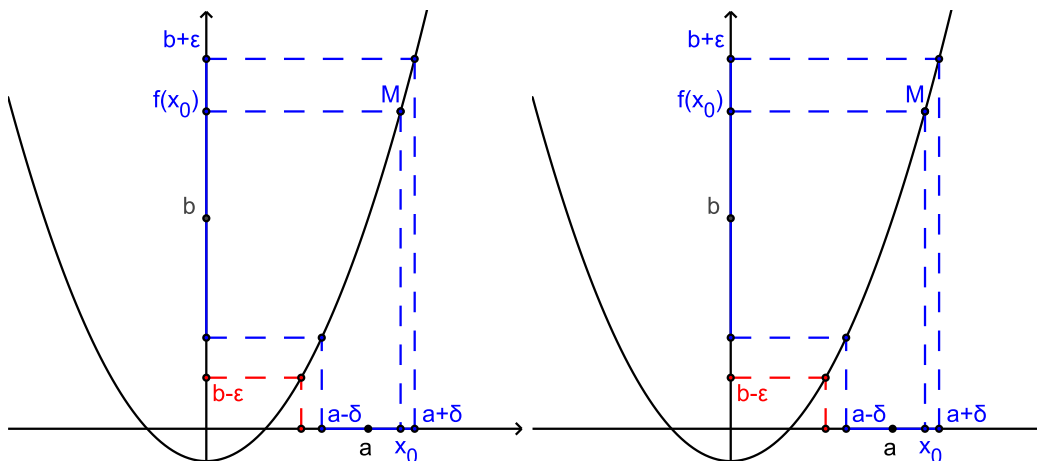
4.2 Определение за граница на функция по Коши

Определение 4.2 (по Коши) Казваме, че числото b е граница на функцията f в точката a , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко x , удовлетворяващо $0 < |x - a| < \delta$, е изпълнено $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 4.2 се илюстрира геометрично на (Фиг. 41). За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко $x_0 \in (a - \delta, a + \delta)$ е изпълнено $f(x_0) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

Забележете, че в Определение 4.2 ние изключваме възможността $x = a$, когато търсим границата. Интересуваме се само от поведението на функцията f близо до a , но не и в a .

Пример 4.5 Докажете, че $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$.



Фигура 41: Граница на функция по Коши

Неравенството $|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$ е еквивалентно на $|x - 1| < \varepsilon/2$. Следователно, за всяко $\varepsilon > 0$, ако изберем $\delta = \varepsilon/2$, тогава за всяко x , удовлетворяващо $|x - 1| < \delta$ ще е изпълнено неравенството $|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$.

Пример 4.6 Докажете, че $\lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 - 7x + 6) = 4$

За всяко $x = 1 + h$ е изпълнено

$$|5x^2 - 7x + 6 - 4| = |5(1 + h)^2 - 7(1 + h) + 6 - 4| = |5 + 10h + 5h^2 - 7 - 7h + 6 - 4| = |h||3 + 5h|.$$

Нека $\varepsilon > 0$. Избираме $\delta = \min\{1, \varepsilon/8\}$. Тогава за всяко $x = 1 + h \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ е в сила неравенството $|5x^2 - 7x + 6 - 4| \leq 8|\delta| < \varepsilon$.

Нека да отбележим, че когато разглеждаме неравенството $0 < |x - a| < \delta$ в Определение 4.2 разглеждаме само тези x , които принадлежат на дефиниционата област на f .

Пример 4.7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Имаме $0 \leq 1 - \frac{\sin x}{x} \leq 1 - \cos x = 2\sin^2(x/2) \leq |x|$. Нека $\varepsilon > 0$ и избираме $\delta = \varepsilon$. Тогава очевидно от $0 < |x| < \delta = \varepsilon$ следва неравенството $\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < |x| < \varepsilon$ (разбира се $x \neq \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$).

В следващия пример ще приложим резултата от Пример 4.7.

Пример 4.8 Намерете границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2^2}\right) \dots \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)$.

Очевидно

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 2^2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{2^2} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2^2} \right) = \dots \\ &= 2^n \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{2^2} \right) \dots \cos \left(\frac{\varphi}{2^n} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2^n} \right).\end{aligned}$$

Тогава

$$\cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{2^2} \right) \dots \cos \left(\frac{\varphi}{2^n} \right) = \frac{\sin \varphi}{2^n \sin \left(\frac{\varphi}{2^n} \right)} = \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{\varphi/2^n}{\sin \left(\frac{\varphi}{2^n} \right)}$$

и следователно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{2^2} \right) \dots \cos \left(\frac{\varphi}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi/2^n}{\sin \left(\frac{\varphi}{2^n} \right)} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Теорема 4.5 *Определенията на Хайне и на Коши за граница на функция са еквивалентни.*

Доказателство: Първо ще покажем, че от определението на Хайне следва определението на Коши. Нека да допуснем противното, т.е. съществува $\varepsilon_0 > 0$, така че за всяко $\delta > 0$ съществува x : $0 < |x - a| < \delta$ и $|f(x) - b| \geq \varepsilon_0$. Нека разгледаме редицата $\delta_n = 1/n$, за $n \in \mathbb{N}$. За всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува x_n с горното свойство. Очевидно, че редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворява условията в определението на Хайне, но $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, което противоречи на предположението, че функцията има граница по Хайне.

Нека сега функцията f има граница по Коши и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица, клоняща към a . Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Съществува $\delta > 0$, така че за всяко x : $0 < |x - a| < \delta$ е в сила $|f(x) - b| < \varepsilon$. От $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ следва, че за всяко $\delta > 0$ съществува N , така че за всяко $n \geq N$ е изпълнено $0 < |x_n - a| < \delta$ и следователно $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. С това доказахме, че $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. \square

Пример 4.9 *За всяко $a > 0$ е изпълнено $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$*

I) Нека $a \geq 1$. Нека $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ и $x_n \neq 0$. Да положим $\alpha_n = \left[\frac{1}{|x_n|} \right]$. Тогава

$$\alpha_n \leq \frac{1}{|x_n|} < \alpha_n + 1.$$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty$. Следователно можем да считаме, че от даден номер нататък $\alpha_n > 0$. За всяко $x_n > 0$ е в сила $\frac{1}{a^{1/\alpha_n}} \leq 1 \leq a^{x_n} \leq a^{1/\alpha_n}$. Това неравенство е в сила и за $x_n < 0$, защото $-x_n > 0$ и $\frac{1}{a^{1/\alpha_n}} \leq a^{-x_n} \leq a^{1/\alpha_n}$. Така получаваме $\frac{1}{a^{1/\alpha_n}} \leq 1 \leq \frac{1}{a^{x_n}} \leq a^{1/\alpha_n}$. От

$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$ следва че $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/\alpha_n} = 1$ и получаваме, че $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = 1$ и следователно $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

II) Нека $0 < a < 1$. Тогава да разгледаме $b = 1/a$. Съгласно разглежданията в I) $\lim_{x \rightarrow 0} b^x = 1$ и следователно $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1/a)^x} = 1$.

Недостатък на двете определения (по Хайне и по Коши) за граница на функция е, че трябва да успеем да се досетим на колко е равна границата - числото b , за да можем да оценяваме разликата $|f(x) - b|$. Същият проблем отбелязахме и при дефиницията за граница на редица. Следващата теорема дава необходимо и достатъчно условие за граница на функция без да се включва граничната стойност b .

Определение 4.3 *Казваме, че функцията f удовлетворява условието на Коши в точката a , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всеки x_1, x_2 : $0 < |x_1 - a| < \delta$, $0 < |x_2 - a| < \delta$ е изпълнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Теорема 4.6 *Функцията f има граница в точката a тогава и само тогава, когато удовлетворява условието на Коши в точката a .*

Доказателство: Нека съществува границата $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тогава според Определение 4.2 за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко $0 < |x - a| < \delta$ е изпълнено неравенството $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогава за всеки две x_1, x_2 , които удовлетворяват неравенствата $0 < |x_1 - a| < \delta$ и $0 < |x_2 - a| < \delta$ са изпълнени неравенствата

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - b) + (b - f(x_2))| \leq |(f(x_1) - b)| + |f(x_2) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна редица, сходяща към a . Следователно съществува $N \in \mathbb{N}$, такова че за всяко $n \geq N$ е изпълнено неравенството $|x_n - a| < \delta$. Тогава за всеки две $n, m \geq N$ е изпълнено $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Следователно редицата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. Да допуснем, че съществуват две редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, за които $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$. Да разгледаме редицата $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, дефинирана с

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_{n-1}, x_n, y_n, x_{n+1}, \dots$$

По конструкция $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. От тук следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всеки $n, m \geq N$ са изпълнени неравенствата $0 < |z_n - a| < \delta$ и $0 < |z_m - a| < \delta$. Следователно е в сила неравенството $|f(z_n) - f(z_m)| < \varepsilon$, което означава, че редицата $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. То противоречи с допускането, че съществуват две нейни подредици $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f(y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, които имат различни граници. \square

Задачи:

1) Като използвате дефиницията за граница на Коши докажете:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 1}{2x - 5} = -\frac{1}{3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 5}{x^2 - 5} = -11$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 - 1} = \frac{4}{3}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} = \frac{1}{8}$.

2) Попълнете $\varepsilon - \delta$ таблицата

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
δ					

за функциите с указаните граници:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{1 - x^2} = -\frac{1}{3}$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{1 - x^2} = \frac{4}{3}$.

4.3 Лява и дясна граница

Определение 4.4 (по Хайне) Казваме, че числото b е лява (дясна) граница на функцията f в точката a , ако за всяка редица от точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n < a$ ($x_n > a$) за всяко $n \in \mathbb{N}$, която е сходяща към a , редицата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към b и записваме $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ ($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$).

Определение 4.5 (по Коши) Казваме, че числото b е лява (дясна) граница на функцията f в точката a , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко x , удовлетворяващо $a - \delta < x < a$ ($a < x < a + \delta$) е изпълнено $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пример 4.10 Функцията $f(x) = \frac{x}{|x|}$ има лява и дясна граница в 0, но няма граница в 0.

Наистина от представянето:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

веднага се вижда, че $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = -1$ и $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 1$.

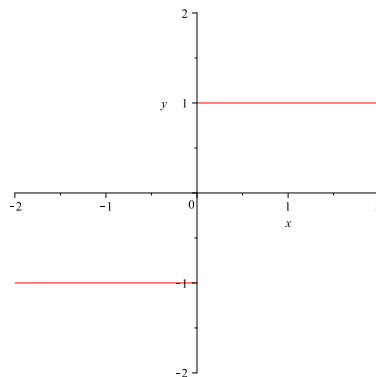
С командата $f := x \rightarrow F$, където F е функция зададена чрез формула с променлива x , се дефинира функция f в *Maple*. Функцията „модул“ е дефинирана в *Maple* с командата $abs(x)$ или $|x|$.

$$g := x \rightarrow \frac{x}{abs(x)};$$

$$\frac{x}{|x|}$$

Ако се опитаме да пресметнем границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} (g(x), x = 0);$$



Фигура 42: Графика на функцията $\frac{x}{|x|}$

Maple връща
undefined

За да можем да търсим лява и дясна граница на функция в Maple, трябва да добавим допълнителен параметър *left* или *right*.

limit(g(x), x = 0, left);

-1

limit(g(x), x = 0, right);

1

plot(g(x), x = -2..2, y = -2..2, discount = true);

Пример 4.11 Функцията

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x < 0 \\ x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

има лява и няма дясна граница в 0.

Когато се дефинира функция с различни формули при различни стойности на променливата x се използва командата *piecewise*.

f := x → piecewise(0 < x, x · cos(1/x), 0 > x, cos(1/x));

$$f(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x < 0 \end{cases}$$

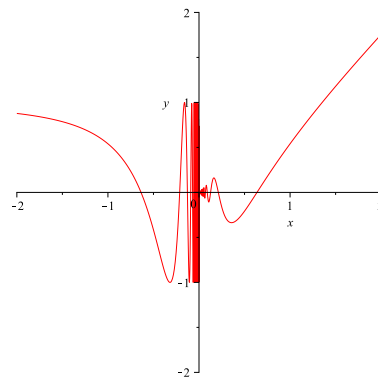
plot(g(x), x = -2..2, y = -2..2, discount = true);

limit(g(x), x = 0, left);

-1..1

limit(g(x), x = 0, right);

0



Фигура 43: Графика на функцията от Пример 4.11

Теорема 4.7 Функцията f има граница в точката a тогава и само тогава, когато съществуват лява и дясна граница в точката a и те са равни.

Доказателство: Ако f има граница в точката a следва, че тя има и лява и дясна граница в точката a .

Нека сега f има лява и дясна граница в точката a , които са равни на b . Нека $\varepsilon > 0$. От определението за лява и дясна граница следва, че съществуват $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, така че

$$(10) \quad \begin{aligned} |f(x) - b| < \varepsilon & \text{ за всяко } x \in (a - \delta_1, a) \\ |f(x) - b| < \varepsilon & \text{ за всяко } x \in (a, a + \delta_2). \end{aligned}$$

Избираме $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогава от (10) следва

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ за всяко } x \in (a - \delta, a + \delta)$$

□

ЗАДАЧИ

1) Изследвайте в кои точки функцията f има граница

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < -1, \\ x^2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & x > 1; \end{cases} \\ \text{в) } f(x) &= \begin{cases} 1 + \sin(x), & x < 0, \\ \cos(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ \sin(x), & x > \pi; \end{cases} \quad \text{г) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4}, & x > 4, \\ 8 - 2x, & x < 4; \end{cases} \\ \text{д) } f(x) &= \begin{cases} x, & x < 1, \\ 3, & x = 1, \\ 2 - x^2, & 1 < x \leq 2, \\ x - 3, & x > 2 \end{cases} \quad \text{е) } f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}. \end{aligned}$$

2) Намерете границите

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x}{1-x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x^2+2}{x^2-3x+2}; \\ \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3x+2}{x^2+3x+2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2-1}{x^3-4x^2+5x-2}; \end{aligned}$$

4.4 Граница в безкрайността

Определение 4.6 (по Хайне) Казваме, че числото b е граница на функцията f при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), ако за всяка редица от точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) редицата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към b и записваме $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$).

Определение 4.7 (по Коши) Казваме, че числото b е граница на функцията f при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $B > 0$ ($B < 0$), така че за всяко x , удовлетворяващо $x > B$ ($x < B$) е изпълнено $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Теорема 4.8 Определение 4.6 е еквивалентно на Определение 4.7.

Доказателството протича аналогично на доказателството на Теорема 4.5.

Теорема 4.9 Функцията f има граница при $x \rightarrow +\infty$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $B > 0$, така че за всеки $x_1, x_2 > B$ е изпълнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Доказателството протича аналогично на доказателството на Теорема 4.6.

Определение 4.8 (по Хайне) Казваме, че функцията f има граница $+\infty$ ($-\infty$) при $x \rightarrow a$, ако за всяка редица от точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ редицата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към $+\infty$ ($-\infty$) и записваме $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$).

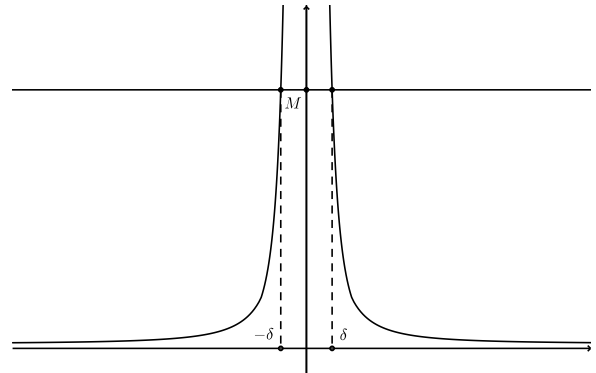
Определение 4.9 (по Коши) Казваме, че функцията f има граница $+\infty$ ($-\infty$) при $x \rightarrow a$, ако за всяко $M > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко x , удовлетворяващо $0 < |x - a| < \delta$ е изпълнено $f(x) > M$ ($f(x) < -M$).

Теорема 4.10 Определение 4.8 е еквивалентно на Определение 4.9.

Доказателството протича аналогично на доказателството на Теорема 4.5.

Пример 4.12 Докажете, че $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Нека $M > 0$ е произволно избрано. Избираме $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Тогава за всяко $0 < |x - 0| = |x| < \delta$ е изпълнено неравенството $\frac{1}{x^2} > M$ (Фиг. 44).



Фигура 44: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Определение 4.10 Нека функцията f е дефинирана при $x > a$ ($x < a$). Казваме, че правата $y = kx + b$ е асимптота за функцията f при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), ако $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx - b) = 0$).

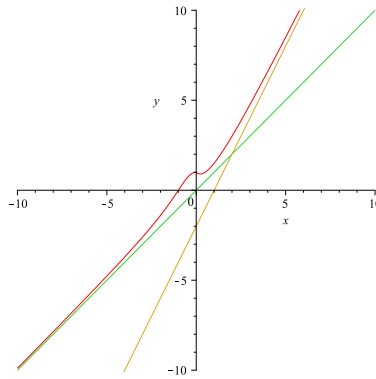
Определение 4.10 означава, че в безкрайността графиката на функцията се доближава все повече до някоя фиксирана права.

Нека да начертаяме графиката на функцията $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}, & x < 0 \\ \frac{2x^2 + 1}{x + 1}, & x \geq 0 \end{cases}$ и на правите

$y = x$, $y = 2x - 2$ (Фиг 45).

$f := x \rightarrow \text{piecewise} \left(x < 0, \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}, 0 \leq x, \frac{2 \cdot x^2 + 1}{x + 1} \right);$
 $\text{plot}([f(x), x, 2 \cdot x - 2], x = -10..10, y = -10..10);$

Забелязваме, че правата $y = x$ е асимптота в $-\infty$, а правата $y = 2x - 2$ е асимптота в $+\infty$.



Фигура 45: Графика на функциите $f(x)$, $y = x$ и $y = 2x - 2$

Твърдение 4.1 Правата $y = kx + b$ е асимптота за функцията f при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) тогава и само тогава, когато $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$) и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = b$).

Доказателство: Ще докажем твърдението за $x \rightarrow +\infty$.

Нека правата $y = kx + b$ е асимптота за функцията f при $x \rightarrow +\infty$. Тогава от $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$ получаваме $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$. От границата

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - kx - b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right)$$

следва, че $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$.

Обратно, ако $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$, то очевидно $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$. \square

Твърдение 4.2 Ако $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) тогава и само тогава когато $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$

Доказателство: Доказателството следва от Твърдение 2.10 и Твърдение 2.11. \square

Твърдение 4.3 Границите $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ и $\lim_{t \rightarrow 0+0} f\left(\frac{1}{t}\right)$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ и $\lim_{t \rightarrow 0-0} f\left(\frac{1}{t}\right)$) съществуват едновременно и са равни.

Доказателство: Доказателството следва от Твърдение 2.10 и Твърдение 2.11. \square

Пример 4.13 Изпълнено е $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$.

Знаем, че за всяка растяща редица от естествени числа n_k е изпълнено $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$.

1) Нека $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ е произволна редица, клоняща към $+\infty$. Ако положим $n_k = [x_k]$, то $n_k \leq x_k < n_k + 1$, $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ и $\frac{1}{n_k + 1} < \frac{1}{x_k} \leq \frac{1}{n_k}$. Така получаваме неравенствата

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}.$$

Тогава от границите

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = e$$

следва $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = e$.

2) Ако $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ е произволна редица, клоняща към $-\infty$, полагаме $y_k = -x_k$ и получаваме, че $y_k \rightarrow +\infty$. Така получаваме

$$\left(1 + \frac{1}{x_k}\right)^{x_k} = \left(1 - \frac{1}{y_k}\right)^{-y_k} = \left(\frac{y_k}{y_k - 1}\right)^{y_k} = \left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right)^{y_k} \cdot \left(1 + \frac{1}{y_k - 1}\right)^{-1} \rightarrow e.$$

Ако направим полагането $x = \frac{1}{\alpha}$ в израза $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x}$, то получаваме

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

Пример 4.14 Покажете, че $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm \frac{\pi}{2}$

Ще докажем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Другата граница се доказва аналогично.

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно избрано. Избираме x_0 , така че $x_0 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Тогава от монотонността на функцията tg следва, че за всяко $x > x_0$ е изпълнено $\operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и следователно за всяко $x > x_0$ са изпълнени неравенствата

$$0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon.$$

ЗАДАЧИ:

1) Намерете границите:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right);$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x); \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \right);$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}); \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x});$$

2) Намерете границите:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \left(\frac{1-x}{1+x} \right); \text{ б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos (\sqrt{x^2 + x} - x); \text{ в) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right);$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{1/x}}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln(x); \text{ е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^4}.$$

3) Намерете асимптотите на f :

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}; \text{ б) } f(x) = \sqrt{x^2 + x}; \text{ в) } f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3};$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}; \text{ д) } f(x) = \ln(1 + e^x); \text{ е) } f(x) = x + \arcsin \left(\frac{1}{x} \right).$$

4.5 Някои свойства на функции, които имат граница

Твърдение 4.4 Ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b > 0$, то съществува $\delta > 0$, така че за всяко $0 < |x - a| < \delta$ е изпълнено $f(x) > b/2$.

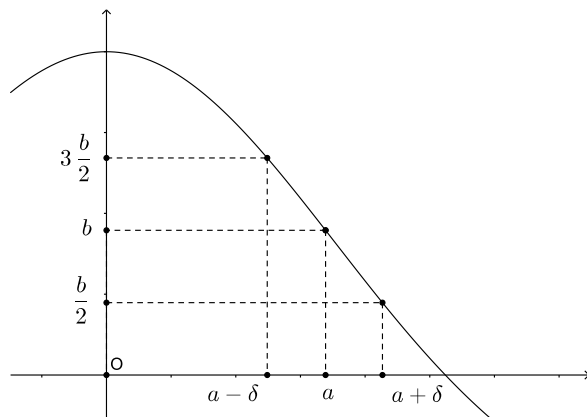
Доказателство: Нека изберем $\varepsilon = b/2$ (Фиг. 46). Тогава съществува $\delta > 0$, така че $|f(x) - b| < b/2$ за всяко $0 < |x - a| < \delta$, т.е.

$$\frac{1}{2}b = b - b/2 < f(x) < b + b/2 = \frac{3}{2}b.$$

□

Следствие 4.1 Ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b > 0$, то съществува $\delta > 0$, така че за всяко $0 < |x - a| < \delta$ е изпълнено $f(x) > 0$.

Определение 4.11 Казваме, че множеството $U \subset \mathbb{R}$ е отворено, ако за всяко $a \in U$ съществува $\delta > 0$, така че $(a - \delta, a + \delta) \subset U$.



Фигура 46: Свойства на функции, които имат граница

Околност на точката $x \in \mathbb{R}$ наричаме всяко отворено множество U , което съдържа точката x .

Определение 4.12 Казваме, че функцията f е ограничена в множеството U , ако съществува M , така че $|f(x)| \leq M$ за всяко $x \in U$.

Теорема 4.11 (ограниченост на функция, която има граница) Ако функцията f има граница в точката a , тогава f е ограничена в някоя околност на точката a .

Доказателство: Нека изберем $\varepsilon = 1$. Съществува $\delta > 0$, така че за всяко $0 < |x - a| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - b| < 1$, т.е.

$$b - 1 < f(x) < b + 1.$$

Ако положим $M = \max\{|b - 1|, |b + 1|\}$, то получаваме неравенството $|f(x)| \leq M$ за всяко $0 < |x - a| < \delta$ \square

ЗАДАЧИ:

1) Докажете, че функцията f е ограничена в точката a :

а) $\frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$, $a = 0$; б) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$, $a = 3$; в) $\frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$, $a = 1$.

4.6 Безкрайно малки и безкрайно големи функции

Определение 4.13 Казваме, че функцията f е безкрайно малка при $x \rightarrow c$, ако

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0.$$

Определение 4.14 Казваме, че функцията f е безкрайно голяма при $x \rightarrow c$, ако

$$\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty.$$

Пример 4.15 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ за всяко $a > 1$.

От Пример 4.15 следва, че a^x при $a > 1$ е безкрайно голяма в $+\infty$ и е безкрайно малка в $-\infty$.

Пример 4.16 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \log_a x = -\infty$ за всяко $a > 1$.

От Пример 4.16 следва, че $\log_a x$ при $a > 1$ е безкрайно голяма в $+\infty$ и в $-\infty$.

Пример 4.17 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^k} = \infty$ за всяко $a > 1$ и всяко $k > 0$.

От Пример 4.17 следва, че $\frac{a^x}{x^k}$ при $a > 1$ и $k > 0$ е безкрайно голяма в $+\infty$.

Пример 4.18 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0$ за всяко $a > 1$ и всяко $k > 0$.

От Пример 4.18 следва, че $\frac{\log_a x}{x^k}$ при $a > 1$ и $k > 0$ е безкрайно малка в $+\infty$.

Твърдение 4.5 Ако функциите f и g са безкрайно малки при $x \rightarrow c$, то и $f \pm g$ и $f \cdot g$ са безкрайно малки при $x \rightarrow c$.

Доказателство: Доказателството следва от равенствата

$$\lim_{x \rightarrow c} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x).$$

□

Често се разглеждат различни функции f и g на една и съща променлива x , които са или безкрайно малки или безкрайно големи в едно и също число a .

Определение 4.15 Нека функциите f и g са безкрайно малки при $x \rightarrow c$. Казваме, че f и g са безкрайно малки от един и същи ред, ако $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = M > 0$.

Очевидно, че в този случай имаме $f = O(g)$ и $g = O(f)$.

Определение 4.16 Нека функциите f и g са безкрайно малки при $x \rightarrow c$. Казваме, че f и g са еквивалентни в точката c , ако $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ и записваме $f \sim g$.

Пример 4.19 Функциите $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, x са еквивалентни в точката 0.

Верността следва от границите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = 1$.

Твърдение 4.6 Нека функциите f , g и h са безкрайно малки при $x \rightarrow c$. Ако $f \sim h$ и $g \sim h$, то $f \sim g$.

Определение 4.17 Нека функциите f и g са безкрайно малки при $x \rightarrow c$. Казваме, че f има по-висок ред от g , ако $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ и записваме $f = o(g)$.

Пример 4.20 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$, за всяко $a > 0$, $a \in \mathbb{Q}$.

I) Нека $a \in \mathbb{N}$. От Нютоновия бином получаваме

$$\begin{aligned} \frac{(1+x)^n - 1}{x} &= \frac{\binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n}{x} \\ &= \binom{n}{1} + \binom{n}{2}x + \cdots + \binom{n}{n}x^{n-1} \end{aligned}$$

След граничен преход в горното равенство при $x \rightarrow 0$ получаваме

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}x + \cdots + \binom{n}{n}x^{n-1} \right) = n.$$

II) Нека $a = \frac{1}{n}$, където $n \in \mathbb{N}$. След полагане на $\sqrt[n]{1+x} - 1 = y$ получаваме

$$\frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{y}{(1+y)^n - 1}$$

От условието $x \rightarrow 0$ можем да приемем, че разглеждаме $|x| < 1$ и тогава от неравенствата $1 - |x| < \sqrt[n]{1+x} < 1 + |x|$ получаваме $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+x} - 1 = 0$. Следователно

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{(1+y)^n - 1} = \frac{1}{n}.$$

III) Нека $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Полагаме $y = \sqrt[q]{1+x} - 1$. Тогава

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{p/q} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^p - 1}{(1+y)^q - 1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^p - 1}{y} \frac{y}{(1+y)^q - 1} = \frac{p}{q}.$$

Така получаваме, че функциите $(1+x)^a - 1$, $a > 0$, $a \in \mathbb{Q}$ и x са безкрайно малки от един и същи ред в нулата, т.е. $(1+x)^a - 1 = O(x)$, но не е изпълнено $(1+x)^a - 1 \stackrel{0}{\sim} x$. Разбира се можем да запишем $\frac{(1+x)^a - 1}{a} \stackrel{0}{\sim} x$.

Пример 4.21 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1 - \frac{x}{n}}{x^2} = -\frac{n-1}{2n^2}$, за всяко $n \in \mathbb{N}$.

Полагаме отново $y = \sqrt[n]{1+x} - 1$ и получаваме

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \frac{1}{n}((1+y)^n - 1)}{((1+y)^n - 1)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{n-1}{2}y^2 + \cdots}{n^2y^2 + \cdots} = -\frac{n-1}{2n^2}.$$

Пример 4.22 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$.

Наистина

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Така получаваме, че функциите $1 - \cos x = O(x^2)$, $\operatorname{tg} x - \sin x = O(x^3)$ в нулата.

Използвайки символът o можем да запишем, че $1 - \cos x = o(x)$ и $1 - \cos x = o(x^\alpha)$ за всяко $\alpha \in [1, 2)$.

Пример 4.23 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}}{x^{3/2}} = -1/4$

От последния пример следва, че $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x} = O(x^{3/2})$.

Твърдение 4.7 Ако функциите f и g са безкрайно големи при $x \rightarrow c$, то и $f + g$ и $f \cdot g$ са безкрайно големи при $x \rightarrow c$.

Твърдение 4.2 може да бъде изказано и с термините на безкрайно малка–безкрайно голяма функция.

Твърдение 4.8 Функцията f е безкрайно голяма при $x \rightarrow c$ тогава и само тогава, когато $\frac{1}{f}$ е безкрайно малка при $x \rightarrow c$.

Определение 4.18 Нека функциите f и g са безкрайно големи при $x \rightarrow c$. Казваме, че f и g са безкрайно големи в точката c от един и същи ред, ако $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = M > 0$.

Определение 4.19 Нека функциите f и g са безкрайно големи при $x \rightarrow c$. Казваме, че f и g са еквивалентни в точката c , ако $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ и записваме $f \sim g$.

От Пример 4.17 и Пример 4.18 получаваме, че за всяко $a > 1$ е в сила представянето $\frac{1}{a^x} = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ и $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\log_a^k x}\right)$ в $+\infty$ за всяко $k > 0$.

ЗАДАЧИ:

1) Докажете следните еквивалентности при $x \rightarrow 0$:

а) $2x - x^2 = O(x)$; б) $x \sin \sqrt{x} = O\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$; в) $x \sin \left(\frac{1}{x}\right) = O(|x|)$;

г) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$ за всяко $\varepsilon > 0$; д) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$;

е) $\arctg\left(\frac{1}{x}\right) = O(1)$; ж) $(1+x)^n - 1 - nx = o(x)$.

2) Докажете следните еквивалентности при $x \rightarrow +\infty$:

а) $2x^3 - 3x^2 = O(x^3)$; б) $\frac{x+1}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$; в) $x + x^2 \sin x \neq O(x^2)$;

г) $\frac{\arctg x}{1+x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$; д) $\ln x = o(x^\varepsilon)$ за всяко $\varepsilon > 0$; е) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$.

5 Непрекъснати функции

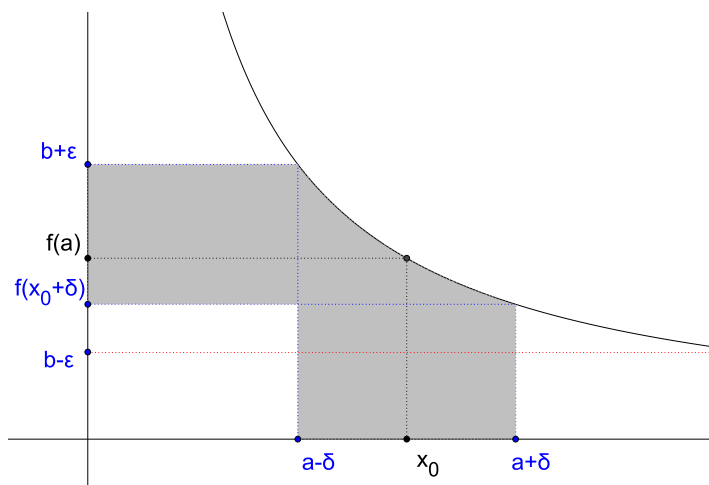
Определение 5.1 Нека точката a принадлежи на дефиниционното множество на функцията f и е точка на съставяне за него. Казваме, че функцията f е непрекъсната в точката a , ако

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

За да избегнем повторението: „точката a принадлежи на дефиниционното множество на функцията f “, ще се уговорим, когато използваме записа $f(a)$, че a принадлежи на дефиниционното множество на функцията f .

Използвайки Определение 4.2, Определение 5.1 може да се изкаже по следния начин:

Определение 5.2 (по Коши) Казваме, че функцията f е непрекъсната в точката a , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко x , удовлетворяващо $|x - a| < \delta$ е изпълнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.



Фигура 47: Непрекъснатост на функцията $\frac{1}{x}$ в точка $x_0 > 0$

Пример 5.1 Нека е дадена функцията $f(x) = \frac{1}{x}$. Намерете $\delta > 0$ за $\varepsilon = 0,01$, така че да се удовлетворява Определение 5.2 в точките $x_0 = 0,1$, $x_0 = 0,01$, $x_0 = 0,001$ (Фиг. 47).

Да запишем

$$(11) \quad |f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{x \cdot x_0} \leq \frac{|x - x_0|}{x_0(x_0 - |x - x_0|)}.$$

Търсим $\delta > 0$, така че за всички x , които удовлетворяват неравенството $|x - x_0| < \delta$ да бъде удовлетворено неравенството $\frac{|x - x_0|}{x_0(x_0 - |x - x_0|)} < \varepsilon$. Нека да положим $u = |x - x_0|$. Тогава неравенството $\frac{|x - x_0|}{x_0(x_0 - |x - x_0|)} < \varepsilon$ е еквивалентно на $u < \frac{x_0 \varepsilon^2}{1 + x_0 \varepsilon}$ за $x_0 > 0$. Полагаме $\delta(x_0, \varepsilon) = \frac{x_0 \varepsilon^2}{1 + x_0 \varepsilon}$. Следователно за всяко x , удовлетворяващо неравенството $|x - x_0| < \delta(x_0, \varepsilon)$, е изпълнено неравенство (11). Попълваме таблицата за $\varepsilon = 0.001$ и x_0 :

x_0	0, 1	0, 01	0, 001
δ	0, 000008	0, 0000008	0, 00000008

$\varepsilon := 0.001;$

for i from 1 to 3 do $\frac{\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{10^i}}$ end do;

0.000009990009990

9.99900010010⁻⁷

9.99990000110⁻⁸

Използвайки Определение 4.1, Определение 5.1 може да се изкаже по следния начин:

Определение 5.3 (по Хайне) Казваме, че функцията f е непрекъсната в точката a , ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходяща към a е изпълнено $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Пример 5.2 Изследвайте за непрекъснатост функцията

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

в точката $x_0 = 0$.

Нека да отбележим, че не е възможно да изследваме за непрекъснатост в точката 0 функцията $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, защото тя не е дефинирана в точката 0. За разлика от понятието граница, където не е нужно функцията да бъде дефинирана в точката, в която изследваме съществуване на граница, при непрекъснатостта е необходимо функцията да бъде дефинирана в изследваната точка.

Нека изберем редиците $x_n = \frac{1}{n\pi}$ и $y_n = \frac{2}{\pi(1 + 4n)}$. Лесно се вижда, че $f(x_n) = 0$ и $f(y_n) = 1$. Така построихме две редици, сходящи към 0, за които редиците от функционалните им стойности имат различни граници и според Определение 5.3 функцията няма

граница.

$$\text{limit} \left(\sin \left(\frac{1}{\frac{1}{\text{floor}(n) \cdot \pi}} \right), n = \text{infinity} \right)$$

0

$$\text{limit} \left(\sin \left(\frac{1}{\frac{2}{1+4 \cdot \text{floor}(n) \cdot \pi}} \right), n = \text{infinity} \right)$$

1

Определение 5.4 Казваме, че функцията $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в Δ , ако е непрекъсната във всяка точка $a \in \Delta$.

Възможно е $\Delta = [a, b]$. Тогава казваме, че функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в точката a (b), ако $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(a)$). Например $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ е непрекъсната във всяка точка от дефиниционното си множество $[-1, 1]$.

Функцията *iscont* в *Maple* проверява, дали дадена функция е непрекъсната в целия указан интервал. Можем да проверяваме за непрекъснатост, както в отворен интервал, така и в затворен интервал: *iscont(expr, x = a..b)*, *iscont(expr, x = a..b, 'closed')*, *iscont(expr, x = a..b, 'open')*. Функцията *iscont* връща като резултат *true* – истина, ако функцията е непрекъсната и *false* – лъжа, ако има поне една точка в която функцията не е непрекъсната.

$$\text{iscont} \left(\frac{1}{x}, x = 0..1 \right)$$

true

$$\text{iscont} \left(\frac{1}{x}, x = -1..1 \right)$$

false

$$f := x \rightarrow \text{piecewise}(x \neq 0, \sin \left(\frac{1}{x} \right), x = 0, 0); f(x);$$

$$x \rightarrow \text{piecewise} \left(x \neq 0, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin \left(\frac{1}{x} \right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{iscont}(f(x), x = -1..1)$$

false

ЗАДАЧИ

1) Попълнете $\varepsilon - \delta$ таблицата:

ε	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001
δ							

- а) $f(x) = x^2, a = 1$; б) $f(x) = x^2, a = 2$; в) $f(x) = x^2, a = 5$;
 г) $f(x) = x^3, a = 1$; д) $f(x) = x^3, a = 2$; е) $f(x) = x^3, a = 5$;
 ж) $f(x) = \sqrt{x}, a = 1$; з) $f(x) = \sqrt{x}, a = 2$; и) $f(x) = \sqrt{x}, a = 5$;
 й) $f(x) = \sqrt[3]{x}, a = 1$; к) $f(x) = \sqrt[3]{x}, a = 2$; л) $f(x) = \sqrt[3]{x}, a = 5$;

2) Изследвайте за непрекъснатост функцията f в точката a .

- а) $f(x) = 3x^4 - 5x + \sqrt[3]{x^2 + 4}, a = 2$; б) $f(x) = (x + 2x^3)^4, a = -1$; г) $f(x) = \frac{2x - 3x^2}{1 + x^3}, a = 1$;
 д) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}, a = -2$; е) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ 1 - x^2, & x < 1 \end{cases}, a = 1$;
 ж) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}, a = 1$; з) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ 1 - x^2, & x > 0 \end{cases}, a = 0$;

3) Изследвайте за непрекъснатост функцията f в интервала.

- а) $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}, x \in (2, +\infty)$; б) $f(x) = 2\sqrt{3 - x}, x \in (-\infty, 3]$;
 в) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$; г) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < \frac{\pi}{4} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

5.1 Аритметични действия с непрекъснати функции

Теорема 5.1 Нека функциите $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ са непрекъснати в точката $x_0 \in (a, b)$. Тогава:

- 1) $f(x) \pm g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ са непрекъснатите в x_0 ;
- 2) Ако $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ е непрекъснатата в x_0 .

Доказателство: Твърдението следва непосредствено от Теорема 4.1. □

Пример 5.3 Константната функция $f(x) = c$ е непрекъснатата за всяко $x_0 \in \mathbb{R}$.

Наистина, нека $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. За всяко $\delta > 0$ и за всяко $x \in (a - \delta, a + \delta)$ следва неравенството $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

Пример 5.4 Функцията x^n , $n \in \mathbb{N}$ е непрекъсната за всяко $x_0 \in \mathbb{R}$.

Съгласно Определение 5.2 функцията x е непрекъсната. Нека $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Избираме $\delta = \varepsilon$. Тогава за всяко $x \in (a - \delta, a + \delta)$ следва неравенството $|x - a| < \varepsilon$. Сега прилагайки индукция и Теорема 5.1 получаваме, че $x^2 = x.x$, $x^3 = x^2.x, \dots, x^n = x.x^{n-1}$ е непрекъсната.

Пример 5.5 Функцията $\sum_{k=0}^n a_k x^k$, където $a_k \in \mathbb{R}$ е непрекъсната за всяко $x_0 \in \mathbb{R}$.

Тъй като константата a_k е непрекъсната функция и x^k е непрекъсната функция, то и $a_k x^k$ е непрекъсната функция. Тогава $a_0 + a_1 x$ е непрекъсната, $(a_0 + a_1 x) + a_2 x^2$ също е непрекъсната. Следователно и $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + a_3 x^3$ е непрекъсната и т.н.

Пример 5.6 Тригонометричните функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cotg} x$ са непрекъснати за всяко x .

Наистина, от

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-a|}{2}$$

получаваме, че за всяко ε можем да изберем $\delta = \varepsilon$, така че за всяко $0 < |x - a| < \delta$ да е изпълнено

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

Доказателството, че \cos е непрекъсната функция е аналогично.

От Теорема 5.1 следва, че функциите $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ са непрекъснати.

ЗАДАЧИ

1) Изследвайте за непрекъснатост функциите:

а) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; б) $\frac{1+x}{1+x^3}$; в) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^3-3x+2}$; г) $f(x) = x^2 \sin^2 x$;

д) $f(x) = \frac{x}{1+\sin^2 x}$; е) $\frac{1+\cos x}{1+\sin^3 x}$; в) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - x}{2+x^2}$; г) $f(x) = x^3 + \cos x \cdot \sin^2 x$.

5.2 Монотонност и непрекъснатост

Определение 5.5 Казваме, че функцията $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е монотонно растяща (намаляваща), ако за всеки две $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \Delta$ е изпълнено неравенството: $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$). Ако имаме строго неравенство, казваме че функцията е строго растяща (намаляваща). Казваме, че една функция е монотонна, ако тя е растяща или намаляваща и строго монотонна, ако е строго растяща или строго намаляваща.

Лема 5.1 Нека $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е монотонна функция. Ако $c \in (a, b)$, тогава съществуват границите $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$.

Доказателство: Без да се намалява общността на разглежданията можем да приемем, че f е растяща функция.

Нека $x_0 \in (a, b)$ е произволно избрано. Тогава за всяко $x < x_0$ е изпълнено неравенството $f(x) \leq f(x_0)$. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна монотонно растяща редица, която клони към x_0 . Тогава редицата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре. Следователно съществува $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$. Нека сега $\varepsilon > 0$ е произволно избрано. Съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N$ е изпълнено неравенството $0 < a - f(x_n) < \varepsilon$. Избираме $\delta > 0$, така че $\delta = \frac{x_0 - x_N}{2}$. Тогава за всяко x , което удовлетворява условието $x_0 - \delta < x < x_0$ е в сила $x_N < x < x_0$. От монотонността на f получаваме неравенството $f(x_0) - \delta < f(x_N) < f(x) < a$. Следователно $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = a$.

Аналогично се доказва, че съществува границата $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$. \square

Следствие 5.1 Ако $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е монотонна функция, то тя е непрекъсната в интервала (a, b) тогава и само тогава, когато $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$ за всяко $c \in (a, b)$.

Теорема 5.2 Ако Δ е интервал, то монотонната функция $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната тогава и само тогава, когато множеството от нейните стойности е интервал.

Доказателство: Нека да допуснем, че съществува точка $x_0 \in \Delta$, в която f е прекъсната. Без да се нарушава общността на разглежданията, можем да приемем, че f е растяща функция. Според Следствие 5.1 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = c_1 < c_2 = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$. Следователно съществува $c \in (c_1, c_2)$, такава че $c \neq f(x_0)$. Тогава областта от стойностите на f не може да бъде цял интервал.

Нека $f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ е растяща и $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$. Ще докажем, че за всяко $\gamma \in (\alpha, \beta)$ съществува $c \in (a, b)$ така че $f(c) = \gamma$. Нека изберем произволно $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Нека да разгледаме множеството $X = \{x \in \Delta : f(x) \leq \gamma\}$.

Множеството X не е празно, защото $a \in X$ и е ограничено отгоре, защото $b \notin X$. Следователно съществува $\sup\{x \in X\} = c$.

Ще покажем, че за всеки $x < c < y$ са изпълнени неравенства $f(x) \leq \gamma \leq f(y)$. Наистина, по дефиниция на точна горна граница съществува $x_1 \in X$, $x < x_1 \leq c$. От дефиницията на числото $c = \sup\{X\}$ и монотонността на f следва неравенството $f(x) \leq f(x_1) \leq \gamma$. За всяко $y > c$ от дефиницията на множеството X получаваме, че $y \notin X$ и следователно $\gamma < f(y)$.

Ще покажем, че $c \in (a, b)$. Да допуснем, че $c = b$. Нека да изберем растяща редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, която е сходяща към c . Тогава от $x_n < c$ следва, че $f(x_n) \leq \gamma$. От непрекъснатостта на f следва, че $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(c) = f(b) = \beta \leq \gamma$, което е противоречие с избора $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Следователно $c \neq b$. Аналогично се доказва, че $c \neq a$.

Нека изберем две монотонни редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, клонящи отляво и отдясно към c . От непрекъснатостта на f и избора на редиците $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ следва

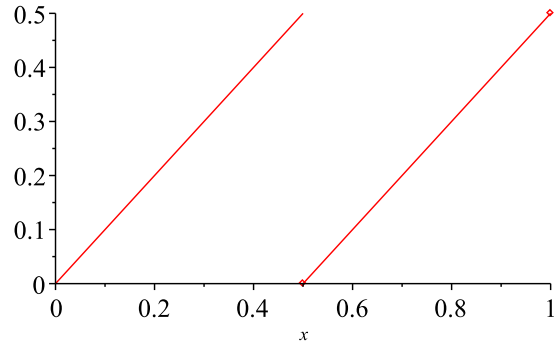
$$\gamma \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \gamma,$$

т.е. $f(c) = \gamma$. □

На (Фиг. 48) е дадена графиката на функцията

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Виждаме, че множеството от стойности $f([0, 1])$ е целия интервал $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, но функцията f не е монотонна. Нарушено е условието f да е непрекъсната.



Фигура 48: График на Теорема 5.2

Лема 5.2 Ако $[a, b]$ е интервал и функцията $f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ е строго монотонно растяща (намаляваща), тогава съществува нейната обратна $f^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ и тя е строго монотонно растяща (намаляваща).

Доказателство: Без да се намалява общността на разглежданията, можем да приемем, че f е строго растяща. За всяко $x \in [a, b]$ съществува единствено $y \in [\alpha, \beta]$, така че $f(x) = y$. От строгата монотонност следва, че за всяко $y \in [\alpha, \beta]$ съществува единствено $x \in [a, b]$, така че $f(x) = y$ т.е. $f^{-1}(y) = x$. Нека $\alpha \leq y_1 < y_2 \leq \beta$. Съществуват $x_1, x_2 \in [a, b]$, така че $f(x_i) = y_i$. Ако допуснем, че $x_1 = x_2$, то получаваме, че $y_1 = y_2$, което противоречи на избора $y_1 < y_2$. Следователно $x_1 \neq x_2$. Ако допуснем, че $x_1 > x_2$, то от строгото растене на f следва, че $y_1 > y_2$, което противоречи с избора на y_1, y_2 . Следователно остава случая $f^{-1}(x_1) = y_1 < y_2 = f^{-1}(x_2)$. □

Теорема 5.3 Ако Δ е интервал и функцията $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е монотонната и непрекъсната, тогава съществува нейната обратна функция $f^{-1} : f(\Delta) \rightarrow \Delta$ и тя е непрекъсната.

Доказателство: Без да се намалява общността на разглежданията можем да приемем, че f е растяща функция. Нека $\Delta = [a, b]$ и $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Според Теорема 5.2 $f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$. Следователно съществува обратната функция $f^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, която според Лема 5.2 също е растяща. От факта, че областта от стойности на f^{-1} е целият интервал $[a, b]$ и Теорема 5.2 следва, че f^{-1} е непрекъсната. □

ЗАДАЧИ

1) Намерете обратната функция f^{-1} и докажете, че е непрекъсната

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x \leq 0, \\ e^x, & x > 0 \end{cases}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & x \leq 0, \\ x^2 + x + 1, & x > 0 \end{cases};$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2, & x < -1, \\ x+1, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{x^2+1}{x}, & x > 1 \end{cases}; \quad \text{г) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}, & x < -1, \\ x^2 + 2x + 3, & x \geq -1. \end{cases}$$

2) Докажете, че обратната функция f^{-1} съществува и е непрекъсната

$$\text{а) } f(x) = e^x + x + 1; \quad \text{б) } f(x) = \ln x + x + 1; \quad \text{в) } f(x) = \operatorname{arctg} x + x + 1;$$

$$\text{г) } f(x) = e^x + \ln x; \quad \text{д) } f(x) = e^x + \operatorname{arctg} x; \quad \text{е) } f(x) = \ln x + \operatorname{arctg} x + 1.$$

5.3 Съставна функция от непрекъснати функции

Теорема 5.4 Нека $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ и $h(x) = g(f(x))$. Ако f е непрекъсната в точката x_0 и g е непрекъсната в точката $y_0 = f(x_0)$, то h е непрекъсната в x_0 .

Доказателство: Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица, сходяща към x_0 . От непрекъснатостта на f следва, че $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) = y_0$. От непрекъснатостта на g в точката $y_0 = f(x_0)$ получаваме, че h е непрекъсната в точката x_0 .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(y_0) = g(f(x_0)) = h(x_0).$$

Пример 5.7 Функцията $\sqrt{1+x^2}$ е непрекъсната.

Наистина, функцията $f = 1 + x^2 : \mathbb{R} \rightarrow [0 + \infty)$ е непрекъсната и нека $g = y^{1/2} : [0 + \infty) \rightarrow [0 + \infty)$, която също е непрекъсната функция. Следователно $g(f(x)) = \sqrt{1+x^2}$ е непрекъсната функция.

ЗАДАЧИ

1) Докажете, че функциите са непрекъснати в дефиниционните си области:

$$\text{а) } f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } \frac{e^{\sin x}}{2 + \cos x}; \quad \text{в) } \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{4 - x^2}}; \quad \text{г) } \ln \left(\frac{1}{1 + x^2} \right).$$

5.4 Непрекъснатост на елементарните функции

Пример 5.8 Показателната функция a^x е непрекъсната за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Според Пример 4.9 имаме $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$. Тогава

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^x - a^{x_0}) = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} (a^{x-x_0} - 1) = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (a^{x-x_0} - 1) = 0.$$

От границите при $a > 1$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, непрекъснатостта на a^x и нейната монотонност следва, че $a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$.

Пример 5.9 Логаритмичната функция $\log_a x$ е непрекъсната за всяко $x \in (0, +\infty)$.

По дефиниция \log е обратна функция на показателната функция и съгласно Теорема 5.3 е непрекъсната.

Пример 5.10 Степенната функция x^a , за произволно $a \in \mathbb{R}$ е непрекъсната за всяко $x \in [0, +\infty)$.

Нека да разгледаме функцията $h(x) = e^{a \ln x}$, която е съставна функция на две непрекъснати функции e^x и $a \cdot \ln x$. Следователно x^a е непрекъсната функция за всяко $a \in \mathbb{R}$.

Пример 5.11 Обратните тригонометрични функции \arcsin , \arccos , \arctg и $\operatorname{arccotg}$ са непрекъснати.

ЗАДАЧИ:

1) Изследвайте за непрекъснатост функциите и определете точките на прекъсване:

$$\text{а) } f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}; \quad \text{в) } f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x}};$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{x}{\sin x}; \quad \text{д) } f(x) = \sqrt{x} \arctg\left(\frac{1}{x^3}\right); \quad \text{е) } x^2 \cdot 2^x;$$

5.5 Примери на прекъснати функции

Определение 5.6 Казваме, че точката $a \in \Delta$ е точка на прекъсване за функцията $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, ако f не е непрекъсната в a .

Пример 5.12 Нека разгледаме функцията $f(x) = [x]$.

Тя е непрекъсната за всяко $x \notin \mathbb{Z}$ и всяко цяло число е точка на прекъсване.
 $\text{plot}(\text{floor}(x), x = -5..5, \text{discont} = \text{true});$

Ако $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, то винаги можем да додефинираме f в точката a , така, че тя да бъде непрекъсната.

Пример 5.13 Нека разгледаме функцията $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Ако додефинираме $f(0) = 0$, то f става непрекъсната за всяко $a \in \mathbb{R}$.

Определение 5.7 Казваме, че в точката $a \in \Delta$ функцията $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната отляво (отдясно), ако $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$).

Пример 5.14 Нека разгледаме функциите f и g , дефинирани чрез

$$f(x) = \begin{cases} a^{1/x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad a > 1 \quad \text{и} \quad g(x) = \begin{cases} \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

От границите $\lim_{x \rightarrow 0-0} a^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} a^{\frac{1}{x}} = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow 0-0} \text{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \text{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ следва, че функцията f е непрекъсната отляво и прекъсната отдясно в точката $a = 0$, докато функцията g е прекъсната и отляво и отляво в точката $a = 0$.

Ако търсим граници в *Maple*, където функцията зависи от параметър можем да укажем допълнителни условия за параметъра с командата *assuming* условие:

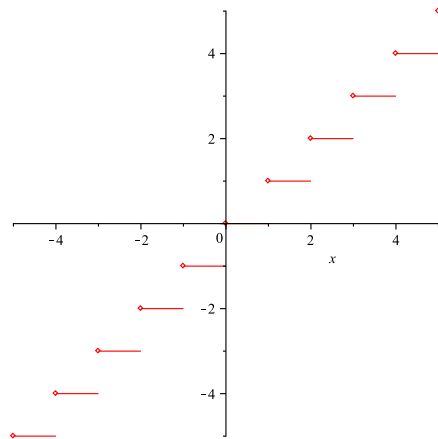
$$\text{limit}\left(\frac{1}{ax}, x = 0, \text{left}\right) \text{ assuming } 1 < a;$$

0

$$\text{limit}\left(\frac{1}{ax}, x = 0, \text{right}\right) \text{ assuming } 1 < a;$$

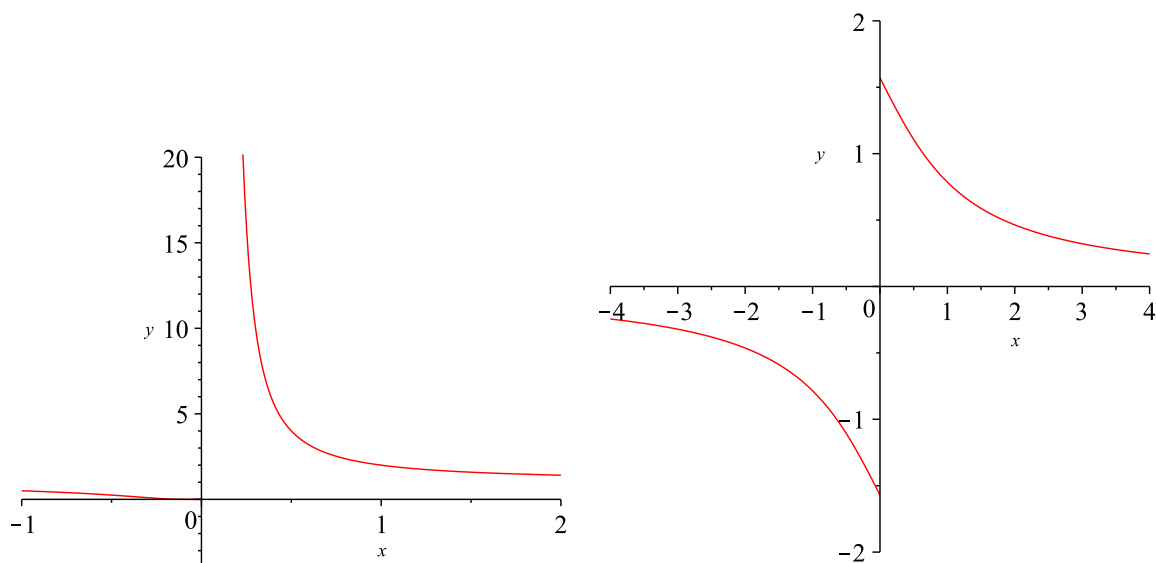
∞

$$\text{limit}\left(\text{arctg} \frac{1}{x}, x = 0, \text{right}\right)$$



Фигура 49: Функцията цяла част – $[x]$

$\frac{\pi}{2}$
 $\text{limit}\left(\text{arctg}\frac{1}{x}, x = 0, \text{left}\right)$
 $-\frac{\pi}{2}$
 $\text{plot}([2^{(1/x)}, \text{arctan}(1/x)], x = -2..2, y = -3..10, \text{discont} = \text{true});$



Фигура 50: Функции $2^{\frac{1}{x}}$ и $\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

Определение 5.8 Казваме, че в точката $a \in \Delta$ функцията $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ има прекъсване от първи род, ако съществуват лявата и дясната граница на функцията в точката a и $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$.

Ако една функция има прекъсване от първи род в точката a винаги можем да я додефинираме в точката a като положим $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Пример 5.15 Нека разгледаме функцията $f(x) = \text{arctg}(1/x^2)$, за $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

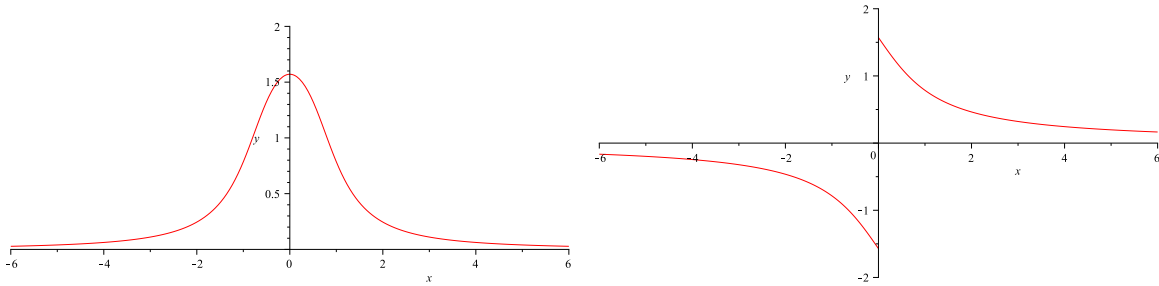
От границите

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \text{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \text{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

следва, че в точката 0 функцията $f(x) = \text{arctg}(1/x^2)$ има прекъсване от първи род.

Определение 5.9 Казваме, че в точката $a \in \Delta$ функцията $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ има прекъсване от втори род, когато е изпълнено едно от условията:

- а) поне една от границите $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ не съществува или е безкрайност;
 б) съществуват и лявата и дясната граници в точката a на функцията f , но са различни.



Фигура 51: Графики на функциите $\arctg \frac{1}{x^2}$ и $\arctg \frac{1}{x}$

Пример 5.16 Нека разгледаме функцията $f(x) = \arctg(1/x)$, за $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

От границите

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \arctg\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \arctg\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

следва, че в точката 0 функцията $f(x) = \arctg(1/x)$ има прекъсване от втори род.

Пример 5.17 Да разгледаме функцията $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

От свойствата на граници на функция веднага се съобразява, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = 1, \quad \text{за всяко } |x| > 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = -1, \quad \text{за всяко } |x| < 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = 0, \quad \text{за всяко } |x| = 1.$$

Тогава

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1 \\ -1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \end{cases}$$

Тази функция е пример за дефиниране на функция с помощта на граница. *Maple* успешно се справя с такъв тип дефиниции.

$$f := x \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{2 \cdot n} - 1}{x^{2 \cdot n} + 1}, n = \text{infinity} \right);$$

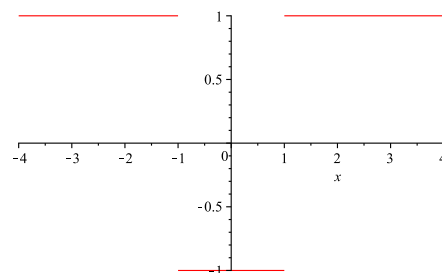
$$x \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2 \cdot n} - 1}{x^{2 \cdot n} + 1};$$

$$\text{print}(f(-3), f(0), f(1/2), f(1), f(2));$$

$$1; -1; -1; 0; 1;$$

$$\text{plot}(f(x), x = -2..2, \text{discont} = \text{true});$$

Функцията f има прекъсване от втори род в точките ± 1 и е непрекъсната във всяка точка различна от ± 1 .



Фигура 52: Графика на функцията $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$

ЗАДАЧИ:

1) Изследвайте за непрекъснатост функциите и определете вида на точките на прекъсване:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in (1, 2]; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 1] \\ 2 - x, & x \in (1, +\infty); \end{cases}$$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), & x \in [-1, 1] \\ |x - 1|, & x \in (1, +\infty); \end{cases} \quad \text{д) } f(x) = \begin{cases} \cotg^2(\pi x), & x \notin \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2) Изследвайте за непрекъснатост функциите в интервала $(-\infty, +\infty)$:

$$\text{a) } f(x) = \text{sign}(\sin x); \quad \text{б) } f(x) = x \left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil; \quad \text{в) } f(x) = x - [x]; \quad \text{г) } f(x) = \text{sign}\left(\cos \frac{1}{x}\right);$$

$$\text{д) } f(x) = x[x]; \quad \text{е) } f(x) = x^2 - [x^2]; \quad \text{ж) } f(x) = [x] \sin(\pi x); \quad \text{з) } f(x) = (-1)^{[x^2]}.$$

3) Изследвайте за непрекъснатост функциите:

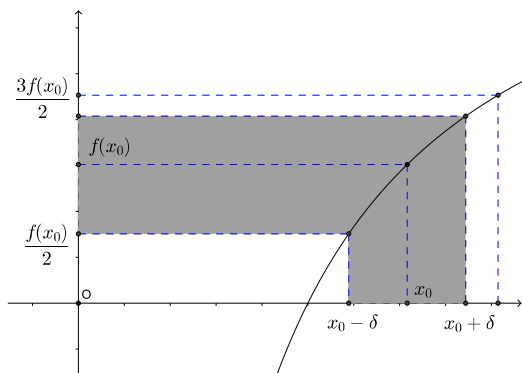
$$\text{a) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n}, \quad x \in [0, +\infty); \quad \text{б) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\text{в) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}, \quad x \in (-\infty, +\infty); \quad \text{г) } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

д) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}, x \in (-\infty, +\infty)$; е) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{nx})}{\ln(1 + e^n)}, x \in (-\infty, +\infty)$.

5.6 Свойства на непрекъснатите функции

Лема 5.3 (за запазване на знака) Нека функцията f е непрекъсната в точката x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Тогава съществува $\delta > 0$, така че $f(x) \cdot f(x_0) > 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (Фиг. 53).



Фигура 53: Лема за запазване на знака

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от Следствие 4.1. \square

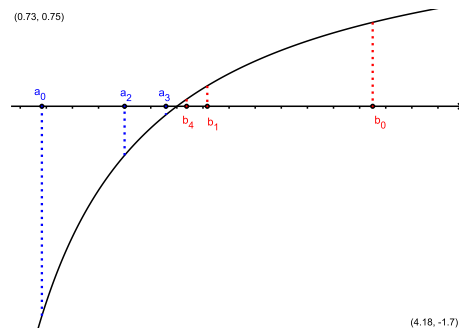
Теорема 5.5 (Първа теорема на Болцано–Коши) Нека f е непрекъсната функция в затворения интервал $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогава съществува $c \in (a, b)$, така че $f(c) = 0$.

Доказателство: Да предположим, че $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Разделяме интервала $[a, b]$ наполовина с точката $\frac{a+b}{2}$. Ако се случи $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то теоремата е доказана и полагаме $c = \frac{a+b}{2}$. Нека

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$. Тогава функцията f ще приема стойности с различни знаци в краищата на единия от интервалите $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ или $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ (при това винаги ще е отрицателен знакът в левия край и положителен в десния). Нека да означим този интервал с $[a_1, b_1]$. Разделяме получения интервал наполовина с точката $\frac{a_1+b_1}{2}$.

Ако се случи $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, то теоремата е доказана и полагаме $c = \frac{a_1+b_1}{2}$. Нека $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) \neq 0$. Тогава функцията f ще приема стойности с различни знаци в краищата на единия от интервалите $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ или $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. Да означим този интервал с $[a_2, b_2]$.

Продължаваме този процес на деления наполовина по индукция и получаваме редица от вложени един в

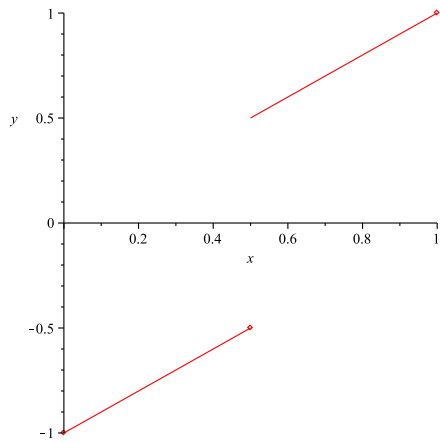


Фигура 54: Първа теорема на Болцано–Коши

друг затворени интервали с дължина $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. От

$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ и Теоремата 2.2 следва, че съществува $c \in [a, b]$, така че $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$. От $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$ получаваме, че $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0$ и $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0$ и следователно $f(c) = 0$. \square

Пример 5.18 Да разгледаме функцията $f(x) = \begin{cases} x-1, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ x, & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$



Фигура 55: Графика на функцията от Пример 5.18

Веднага се съобразява, че $f(0) = -1$ и $f(1) = 1$, но не съществува $c \in [0, 1]$, така че $f(c) = 0$. Нарушено е условието функцията да бъде непрекъсната.

$f := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x \leq 1/2, x-1, 1/2 < x \text{ and } x \leq 1, x);$

$f := x \rightarrow \text{piecewise}(0 \leq x \text{ and } x \leq 1/2, x-1, 1/2 < x \text{ and } x \leq 1, x);$

$\text{plot}(f(x), x = 0..1, y = -1..1, \text{discont} = \text{true});$

Пример 5.19 Докажете, че уравнението $2^x = 4x$ има поне два корена.

Очевидно, че $x = 4$ е решение на уравнението. Нека разгледаме функцията $f(x) = 2^x - 4x$. От $f(0) = 1$ и $f(1/2) = \sqrt{2} - 2 < 0$ следва, че уравнението има и друг корен в интервала $[0, 1/2]$.

Ще отбележим, че доказателството, на твърдението за съществуване на точно два корена, изисква повече познания за функциите.

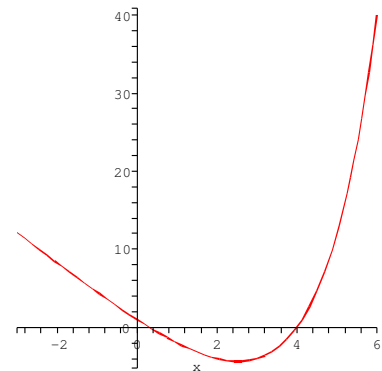
Пример 5.20 Докажете, че всеки полином от нечетна степен има поне един реален корен.

Нека $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1x + a_0$. От границите

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \text{sign}(a_{2n+1})\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\text{sign}(a_{2n+1})\infty$$

следва, че съществува $M > 0$, така че $P(-M).P(M) < 0$. Според Теорема 5.5 следва съществуването на $c \in (-M, M)$, така че $P(c) = 0$.

Теорема 5.5 дава възможност за приближено намиране на корените на уравнение.



Фигура 56: Графика на функцията $2^x - 4x$

Пример 5.21 Да се намери с точност 0,01 корена на уравнението $x^4 - x - 1 = 0$ разположен между 1 и 2.

Да положим $a_0 = 1$ и $b_0 = 2$. Проверяваме, че $f(a_0) = -1$ и $f(b_0) = 13$. Следователно съществува $c \in (1, 2)$, така че $f(c) = 0$. Пресмятаме $f\left(\frac{b_0 + a_0}{2}\right) = 41/16$. Следователно $c \in (1, 3/2)$. Полагаме $a_1 = a_0$ и $b_1 = \frac{b_0 + a_0}{2}$. Пресмятаме $f\left(\frac{b_1 + a_1}{2}\right) = 49/256$. Следователно $c \in (1, 5/4)$. Полагаме $a_2 = a_1$ и $b_2 = \frac{b_1 + a_1}{2}$. Пресмятаме $f\left(\frac{b_2 + a_2}{2}\right) = -2143/4096$. Следователно $c \in (9/8, 5/4)$. Полагаме $a_3 = \frac{b_2 + a_2}{2}$ и $b_3 = b_2$. Пресмятаме $f\left(\frac{b_3 + a_3}{2}\right) = -13087/1048576$. Следователно $c \in (39/32, 5/4)$. Полагаме $a_4 = \frac{b_3 + a_3}{2}$ и $b_4 = b_3$. Пресмятаме $f\left(\frac{b_4 + a_4}{2}\right) = 1463489/16777216$. Следователно $c \in (39/32, 79/64)$. Полагаме $a_5 = a_4$ и $b_5 = \frac{b_4 + a_4}{2}$. Пресмятаме $f\left(\frac{b_5 + a_5}{2}\right) = 9884881/268435456$. Следователно $c \in (39/32, 157/128)$. От неравенството $b_5 - a_5 = \frac{1}{2^6} < 0,01$ следва, че с точност 0,01 коренът се намира в интервала $(39/32, 157/128) \approx (1.218, 1.227)$.

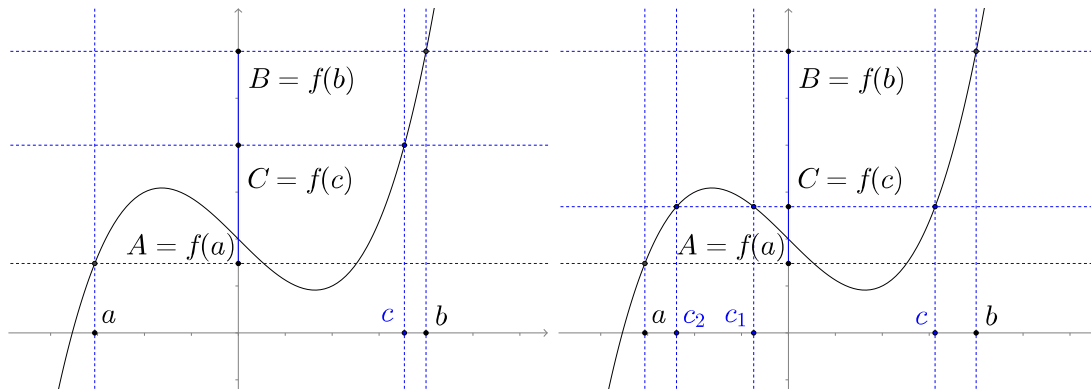
С помощта на *Maple* е възможно да се пресмята бързо приближените стойности за произволно отнапред зададено приближение.

```

f := x -> x^4 - x - 1
a := 1; b := 2; epsilon := 0.001;
for n from 1 while (b - a) / 2^(n-1) > epsilon do
  u := f(a); v := f(b); w := f((b + a) / 2); evalf(b - a);
  if sign(u) * sign(w) < 0 then a := a; b := (b + a) / 2;
  else a := (b + a) / 2; b := b;
end if;
end do; n + 1; evalf(a); evalf(b); evalf(b - a)
1
2
0.001
11
1.220703125
1.222656250
0.0009765625000

```


Така намерихме, че в интервала $(1.220703125, 1.221679688)$ се намира корен на уравнението $f(x) = 0$ с точност 0,001. За това пресмятане бе нужно да се направят $n = 11$ итерации.



Фигура 57: Втора теорема на Болцано–Коши

Теорема 5.6 (Втора теорема на Болцано–Коши) Нека f е непрекъсната функция в интервала $\Delta = [a, b]$, $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогава за всяко C между стойностите A и B съществува $c \in \Delta$, така че $f(c) = C$.

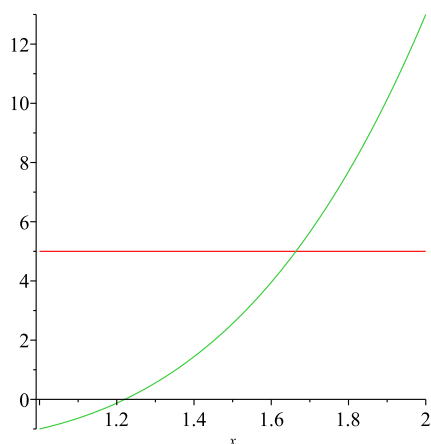
Доказателство: Нека приемем, че $A < B$. Да разгледаме функцията $g(x) = f(x) - C$. Тогава от $g(a) = f(a) - C = A - C < 0$, $g(b) = f(b) - C = B - C > 0$ и Теорема 5.5 получаваме, че съществува $c \in [a, b]$, така че $g(c) = 0$, т.е. $f(c) = C$. \square

Пример 5.22 Докажете, че уравнението $x^4 - x - 1 = 5$ има поне един корен разположен между 1 и 2.

Функцията $f(x) = x^4 - x - 1$ приема всички стойности заключени между $f(1) = -1$ и $f(2) = 13$. Съгласно Теорема 5.6 за $5 \in [-1, 13]$ съществува поне едно $c \in [0, 1]$, така че $f(c) = c^4 - c - 1 = 5$ (Фиг. 58).

$f := x \rightarrow x^4 - x - 1; g := x \rightarrow 5;$
 $plot(\{f(x), g(x)\}, x = 1..2)$

Теорема 5.7 (Първа теорема на Вайерщрас) Ако f е непрекъсната в интервал $[a, b]$, то тя е ограничена, т.е. съществуват константи $m, M \in \mathbb{R}$, така че $m \leq f(x) \leq M$ за всяко $x \in [a, b]$.



Фигура 58: Решение на уравнението $x^4 - x - 1 = 5$

Доказателство: Нека допуснем противното, т.е. функцията f не е ограничена. Тогава за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува $x_n \in [a, b]$, така че $|f(x_n)| \geq n$. Съгласно Теорема 2.2 съществува сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Нека означим границата ѝ с x_0 . От непрекъснатостта на f следва, че $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$, което е невъзможно понеже $|f(x_{n_k})| \geq n_k$. \square

Пример 5.23 Да разгледаме функцията $f(x) = \frac{1}{x}$ в интервала $(0, 1]$.

Функцията е непрекъснатата, но не е ограничена отгоре $\sup\{f(x) : x \in (0, 1]\} = +\infty$, защото интервалът не е затворен. За всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\sup\{f(x) : x \in [\varepsilon, 1]\} = 1/\varepsilon < +\infty$ и функцията е ограничена в интервала $[\varepsilon, 1]$.

Пример 5.24 Да разгледаме функцията $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ в интервала $[-1, 1]$.

Функцията не е ограничена отгоре $\sup\{f(x) : x \in (0, 1]\} = +\infty$, защото тя не е непрекъснатата в $[0, 1]$.

Теорема 5.8 (Втора теорема на Вайерщрас) Ако f е непрекъснатата в интервал $[a, b]$, то тя достига своите точна долна и точна горна граница, т.е. съществуват $x_1, x_2 \in [a, b]$, така че $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ за всяко $x \in [a, b]$.

Доказателство: От Теорема 5.7 следва, че f ограничена. Нека $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ е нейната точна горна граница. По дефиниция за всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува $x_n \in [a, b]$, така че $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Съгласно Теорема 2.2 съществува сходяща подредица $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Нека означим границата ѝ с x_0 . От непрекъснатостта на f следва, че $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. По конструкцията имаме $f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}$ и следователно $f(x_0) \geq M$. От избора на M като точна горна граница следва, че $f(x_0) = M$. \square

Карл Теодор Вилхелм Вайерщрас (1815–1897) е роден в Остенфелде, Германия. Баща му не дооценява математическата дарба на Карл и веднага след завършване на гимназията го праща да учи право и икономически науки в университета в Бон с цел - бъдеща кариера в държавната администрация. В резултат на това, младият Вайерщрас изпитва дълбоки душевни терзания и не може да се отдаде нито на математиката, нито на предначертания от баща му път към правото и икономиката. Така той прекарва по-голямата част от студентските си години из залите за фехтовка и кръчмите. Самостоятелно изучава „Небесна механика“ на Лаплас и някои работи на Якоби по елиптични функции. В крайна сметка решава твърдо да стане математик и без да се яви на изпитите по икономика и право напуска университета на четвъртата година.

Вайерщрас се записва в академията в Мюнстер през 1839. По това време там преподава Гудерман, което е и една от причините Вайерщрас да настоява да учи в нея. По време на престоя си в Бон, Карл се запознава с преписки от лекциите на Гудерман по елиптични функции и сега получава възможност да ги чуе на живо. Гудерман оказва огромна подкрепа на младия математик в научните му търсения. След полагане на необходимите изпити Вайерщрас става учител в гимназията в Мюнстер през 1841-42, след това в прогимназия в Дойч Кроне, и през 1848 се мести в Браунсберг. Вайерщрас преподава не само математика, но и физика, биология, география, немски, дори и физическо.

През 1854 той успява да публикува труда си „Върху теорията на абеловите функции“ в Крел-журнал, което го издига на върха почти моментално. В този си труд Вайерщрас не дава пълната теория за обръщането на хиперелиптичните интеграли, а само някои негови методи за развитие на абелови функции в сходящи редове. Цялата теория той публикува в статията си „Теория на абеловите функции“ в Крел-журнал през 1856.

Тези му две статии не остават без отклик и Берлинският университет му предлага така желаното професорско място и той без колебания го приема през Октомври 1856. В лекциите си по аналитични функции (сега тази дисциплина се нарича комплексен анализ) за първи път дава резултати, които е имал още от 1841, но останали непубликувани. В лекциите си по Въведение в анализа за пръв път се заема с основите на анализа. С това започва и изграждането на неговата теория за реалните числа. В лекциите си от 1863, доказва че комплексните числа са единственото комутативно разширение на реалните. През 1872, осланяйки се на математическата строгост, съумява да построи функция, която въпреки че е непрекъсната във всяка точка, няма производна в нито една точка (функция на Вайерщрас).

Сред учениците на Вайерщрас са: Митаг-Лефлер, Клайн, Ли, Кантор, Шотки, Фробениус, Хурвиц, Килинг, Минковски, Шварц и др. Особено място за него сред тях заема София Ковалевска. След идването ѝ в Берлин Вайерщрас я приема за частен ученик, тъй като университетските власти не ѝ разрешават прием. Благодарение на неговото влияние и на застъпничеството на Митаг-Лефлер, на Ковалевска е дадено място в Стокхолм. Двамата поддържат кореспонденция до смъртта на Ковалевска през 1891. (Няма достоверни данни защо след това Вайерщрас изгаря всичките над 160 писма!)

Вайерщрас, Кумер и Кронекер издигат Берлин до най-престижното място за изучаване на математика. Вайерщрас публикува малко заради острата си самокритичност и стремеж към възможно най-голяма общност на резултатите с пълна математична строгост. (Трудовете на Вайерщрас все още не са напълно публикувани!)

Вайерщрас умира от пневмония на 19 февруари 1897 на осемдесет и две годишна възраст, като последните няколко години е прикован на инвалидния стол.

Освен с полагането на основите на съвременния анализ, Вайерщрас е известен заедно с Риман и Коши и като един от „бащите“ на комплексния анализ (теорията на аналитичните функции). Негови са и първите трудове по многомерен комплексен анализ. Изследва също и цели функции, безкрайни произведения, равномерна сходимост, билинейни и квадратични форми и



Weierstraß

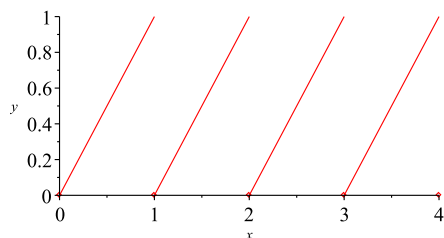
Фигура 59: Karl Theodor Wilhelm Weierstraß

вариационни задачи. Строгостта, която Вайерштрас налага при определението на ирационално число, модела Теорема - Доказателство, повлияват силно на бъдещето на математиката и обликът ѝ днес.

Пример 5.25 Функцията $f(x) = x - [x]$, дефинирана в интервала $[0, 4]$ не достига точната си горна граница (Фиг. 60).

Веднага се съобразява, че f е ограничена функция, защото $0 \leq f(x) < 1$. Не съществува $c \in [0, 4]$, така че $f(c) = 1$, въпреки че $\sup\{f(x) : x \in [0, 4]\} = 1$. Наистина, за редицата $x_n = 1 - \frac{1}{10^n}$ е изпълнено $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$, защото функцията f не е непрекъсната. Тя е прекъсната в точките 1, 2, 3, 4.

plot(x - floor(x), x = 0..4, y = 0..1, scont = true)



Пример 5.26 Функцията $\arctg x$, дефинирана в интервала $(-\infty, +\infty)$ не достига точните си долна и горна граници.

Фигура 60: $f(x) = \{x\} = x - [x]$

От $-\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg x = \pm\frac{\pi}{2}$ следва, че $\sup\{\arctg x : x \in (-\infty, +\infty)\} = \frac{\pi}{2}$ и $\inf\{\arctg x : x \in (-\infty, +\infty)\} = -\frac{\pi}{2}$. Но не съществуват $c_1, c_2 \in (-\infty, +\infty)$, така че $\arctg c_1 = -\infty$ и $\arctg c_2 = +\infty$ (Фиг 61).

Интервалът, в който разглеждаме функцията е безкраен. Във всеки един интервал $[a, b]$ функцията $\arctg x$ достига точната си долна и точната си горна граница.

f := x → arctan(x);

g1 := x → -π/2;

g2 := x → π/2; plot(f(x), g1(x), g2(x), x = -30..30, y = -2..2)

Пример 5.27 Функцията x^2 , дефинирана в $(-1, 1)$ не достига точната си горна граница.

В този пример интервалът е отворен.

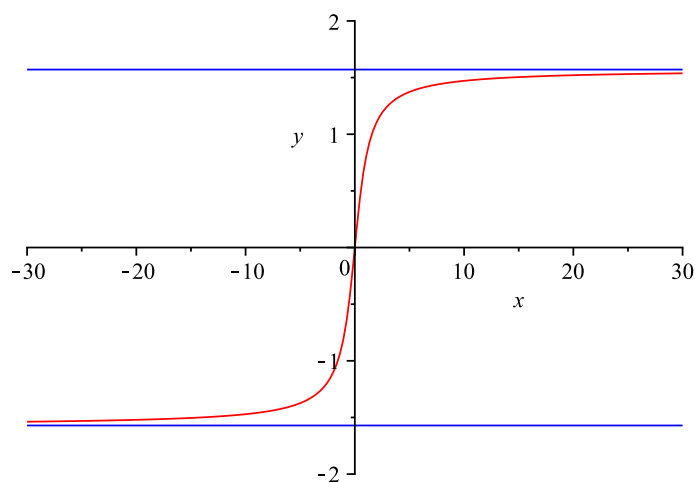
Горните примери илюстрират, че всички условия в Теорема 5.8 са съществени.

Следствие 5.2 Ако $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната, тогава областта от стойностите ѝ е краен затворен интервал.

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от Теорема 5.6 и Теорема 5.8. \square

Задачи:

1) Докаже че функцията f има поне n корена в интервала $[a, b]$:



Фигура 61: $\arctg x$

а) $f(x) = e^x - 5x$, $n = 1$, $[-2, 3]$; б) $f(x) = e^x - 5x^2$, $n = 3$, $[-1, 5]$;

в) $f(x) = 2^x - x^2$, $n = 3$, $[-2, 5]$; г) $f(x) = 2^x - x - 1$, $n = 2$, $[-3, 4]$;

д) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$, $n = 2$, $[0, 3]$; е) $f(x) = 2^{\sin x} - x$, $n = 1$, $[-3, 3]$.

2) Намерете с точност $\varepsilon = 10^{-i}$, $i = 1, 2, 3$:

а) $\sqrt{2}$, б) $\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt[4]{2}$;

г) $\sqrt{3}$, д) $\sqrt[3]{3}$; е) $\sqrt[4]{3}$;

ж) $\sqrt{7}$, з) $\sqrt[3]{7}$; и) $\sqrt[4]{7}$.

3) Намерете с точност $\varepsilon = 10^{-i}$, $i = 1, 2, 3$ корена на уравнението в интервала $[a, b]$:

а) $x^3 - x - 2 = 0$, $[0, 2]$; б) $x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1 = 0$, $[4, 5]$; в) $2^x - x^3 + 1 = 0$, $[1, 2]$;

г) $4^x - 5x^3 - 4 = 0$, $[2, 5]$; д) $\ln x - \frac{x}{4} = 0$, $(0, 2]$; е) $\ln(1 + x^2) + \frac{x}{2} - 2$, $[0, 2]$.

5.7 Приложение на непрекъснатостта за намиране на граници

Понятието непрекъснатост има съществена роля при обобщаване на основни граници за всички реални числа.

Пример 5.28 За всяко $c \in \mathbb{R}$ е изпълнено $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$.

Да разгледаме израза $\left(\left(1 + \frac{c}{n}\right)^{\frac{n}{c}}\right)^c$. От $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} = 0$ следва $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{\frac{n}{c}} = e$. От непрекъснатостта на степенната функция x^c следва

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{c}{n}\right)^{\frac{n}{c}}\right)^c = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^{\frac{n}{c}}\right)^c = e^c.$$

Теорема 5.9 Нека са дадени две числови редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ако редицата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща от известен номер нататък, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ и $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$, $a \in \mathbb{R} \cup \infty$, тогава $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a$.

Доказателство: I) Нека $a \neq \infty$. От $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$ следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N_1 \in \mathbb{N}$, така че неравенствата

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < a + \frac{\varepsilon}{2}$$

са изпълнени за всяко $n \geq N_1$. От условието, че редицата $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща от известен номер N_0 нататък следва, че $y_n - y_{n-1} > 0$ за $n \geq N_0$. Следователно за всяко $n \geq N = \max\{N_0, N_1\}$ са изпълнени неравенствата:

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{k=N+1}^n (y_k - y_{k-1}) < \sum_{k=N+1}^n (x_k - x_{k-1}) < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sum_{k=N+1}^n (y_k - y_{k-1}).$$

От равенствата $x_n - x_N = \sum_{k=N+1}^n (x_k - x_{k-1})$ и $y_n - y_N = \sum_{k=N+1}^n (y_k - y_{k-1})$ получаваме, че е изпълнено неравенството

$$\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) (y_n - y_N) < x_n - x_N < \left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right) (y_n - y_N)$$

за всяко $n \geq N$, т.е. $\left|\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

От $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ следва, че съществува $N_2 \in \mathbb{N}$, така че $\left| \frac{x_N - a \cdot y_N}{y_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ за всяко $n \geq N_2$. От тъждеството

$$\frac{x_n}{y_n} - a = \frac{x_N - a \cdot y_N}{y_n} + \left(1 - \frac{y_N}{y_n}\right) \cdot \left(\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a\right)$$

получаваме, че неравенството

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| = \left| \frac{x_N - a \cdot y_N}{y_n} \right| + \left| \frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

е изпълнено за всяко $n \geq \max\{N, N_2\}$.

II) Нека $a = +\infty$, т.е. $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = +\infty$. Следователно $x_n - x_{n-1} > y_n - y_{n-1}$ и тогава е изпълнено $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Съгласно доказаното в I) имаме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = 0$$

и така получаваме $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$. □

Пример 5.29 Ако съществува $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = a.$$

Да положим $x_n = \sum_{k=1}^n a_k$ и $y_n = n$. Прилагаме Теорема 5.9 и намираме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1} = a.$$

Пример 5.30 Докаже, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k}}{n} = 1$.

Доказателството следва непосредствено от Пример 5.29 и Пример 2.39.

Пример 5.31 Ако $a_n > 0$ и съществува $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = a.$$

От непрекъснатостта на функцията $\ln x$ следва че $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$. От Пример 5.29 и непрекъснатостта на $\ln x$ са следват равенствата

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln (\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln a_k}{n} = \ln a.$$

От непрекъснатостта на показателната функция получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln (\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n})} = e^{\ln a} = a.$$

Пример 5.32 Ако $a_n > 0$ и съществува $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$

Да разгледаме редицата $b_1 = a_1$, $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ за $n \geq 2$. Тогава

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \dots b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = a.$$

Пример 5.33 Докажете, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}.$$

Нека да разгледаме редицата $a_n = \frac{n!}{n^n}$. От равенствата

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

получаваме $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-1}$. Отчитайки Пример 5.32, намираме $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$.

Пример 5.34 Докажете, че

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

От непрекъснатостта на $\log_a x$ и Пример 4.13 следва верността на равенствата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) = \log_a e.$$

От Пример 5.34 следва границата

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln e = 1.$$

Пример 5.35 Докажете, че

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Да положим $a^x - 1 = y$. От границата $\lim_{x \rightarrow 0} a^x - 1 = 0$, следва че $y \rightarrow 0$. От полагането получаваме $x = \log_a(1 + y)$. Можем да запишем равенствата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1 + y)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Ако в Пример 5.35 изберем $x = \frac{1}{n}$, то получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \ln a.$$

Пример 5.36 Докажете, че за всяко $\mu \in \mathbb{R}$ е изпълнено

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\mu - 1}{x} = \mu.$$

Да положим $(1 + x)^\mu - 1 = y$. От границата $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^\mu - 1 = 0$ следва, че $y \rightarrow 0$. От полагането получаваме $\frac{\mu \ln(1+x)}{\ln(1+y)} = 1$. Прилагайки (12) можем да запишем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} \cdot \mu \cdot \frac{\ln(1 + x)}{x} = \mu.$$

Твърдение 5.1 Ако съществуват границите $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$, то съществува и границата $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \alpha^\beta$.

Доказателство:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x)} = e^{\beta \ln \alpha} = \alpha^\beta.$$

За случаите $\alpha = 1, \beta = \pm\infty$; $\alpha = 0, \beta = 0$; $\alpha = +\infty, \beta = 0$ в Твърдение 5.1 казваме, че има неопределености съответно от вида 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0 .

Пример 5.37 Докажете, че $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1.$$

Пример 5.38 Докажете, че $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\sin x} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\sin x) \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\frac{\sin x}{x}) x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{\sin x}{x}) x \ln x} = e^0 = 1.$$

ЗАДАЧИ:

1) Намерете границите:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{n} + a \sin \frac{x}{n} \right)^n$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right)$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n-1]{x} \right)$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^a + 2^a + \dots + n^a}{n^{a+1}}$.

2) Намерете границите:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(\pi x))^{\cot(\pi x)}$;

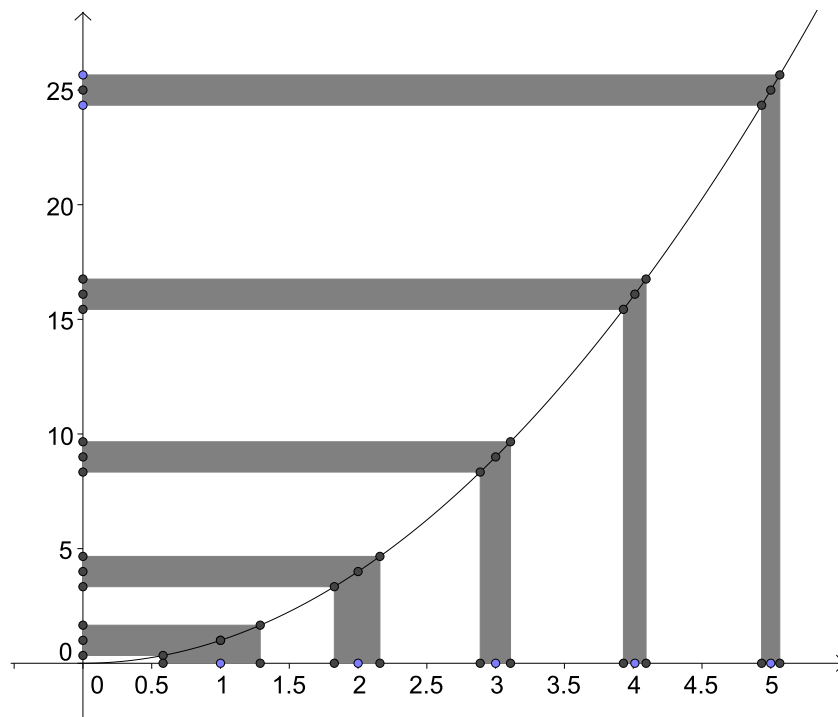
д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$; ж) $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2a} \right)}$.

5.8 Равномерна непрекъснатост

Да разгледаме функцията $f(x) = x^2 : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, която е непрекъсната за всяка точка $a \in \Delta$. Според определението на Коши за непрекъснатост следва, че за всяко a и всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta_{a,\varepsilon} > 0$, така че за всяко x , което удовлетворява неравенството $0 < |x - a| < \delta$, е в сила неравенството $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. При различен избор на $a \in \Delta$, дори и за едно и също $\varepsilon > 0$ може да се окаже, че $\delta > 0$ са различни. Ще илюстрираме това със следния пример $f(x) = x^2$, $a = 1, 2, 3, 4, 5$ и $\varepsilon = 0.01$ (Фиг. 62).

ε	1	2	3	4	5
δ	0.0049	0.0024	0.0016	0.0012	0.0009

С помощта на *Maple* можем лесно и бързо да пресмятаме δ при различни функции f , ε и избор на точките a :



Фигура 62: $\varepsilon - \delta$ за функцията x^2

```

f := x → x2; ε := 0.01;
for i from 1 to 5 do
a := i :
p := solve({x > 0, |f(x) - f(a)| = ε}, x) :
r1 := |i - (eval(x, p[1]))| : r2 := |i - (eval(x, p[2]))| :
r := min(r1, r2) :
print(i, r);
end do :
1, 0.004987562
2, 0.002498439
3, 0.001666204
4, 0.001249805
5, 0.000999900

```

Определение 5.10 Казваме, че функцията $f : \Delta \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е равномерно непрекъсната в Δ , ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всеки две $x_1, x_2 \in \Delta$, $|x_1 - x_2| < \delta$ е изпълнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Пример 5.39 Функцията $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, не е равномерно непрекъсната в интервала

$(0, \pi/2)$.

Нека разгледаме редиците $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ и $y_n = \frac{1}{n\pi}$. Очевидно, че $|x_n - y_n| = \frac{1}{n(2n+1)\pi}$ и $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Следователно f не е равномерно непрекъсната, тъй като за $\varepsilon = 1$ не съществува подходящо $\delta > 0$.

Пример 5.40 Функцията $f(x) = x^2$ е равномерно непрекъсната в интервала $[0, 1]$, но не е равномерно непрекъсната в интервала $[0, +\infty)$.

Нека $x, y \in [0, 1]$. Избираме $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогава за всеки две $x, y \in [0, 1]$, които удовлетворяват неравенството $|x - y| < \delta$ е изпълнено

$$|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq 2|x - y| < 2\delta = \varepsilon.$$

Нека $x, y \in [0, +\infty)$. Избираме редиците $x_n = n - \frac{1}{2n}$, $y_n = n + \frac{1}{2n}$. Очевидно, че $|x_n - y_n| = \frac{1}{n}$ и

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left| \left(n - \frac{1}{2n} \right)^2 - \left(n + \frac{1}{2n} \right)^2 \right| = 2.$$

и следователно f не е равномерно непрекъсната, защото за $\varepsilon = 2$ не съществува подходящо $\delta > 0$.

Теорема 5.10 (Кантор) Ако $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната, тогава тя е равномерно непрекъсната.

Доказателство: Да допуснем противното, т.е. съществува $\varepsilon > 0$ така че за всяко $\delta > 0$ съществуват $x^{(\delta)}$ и $y^{(\delta)}$, така че $|x^{(\delta)} - y^{(\delta)}| < \delta$, но $|f(x^{(\delta)}) - f(y^{(\delta)})| \geq \varepsilon$.

Нека изберем редицата $\delta_n = 1/n$ и за всяко δ_n да изберем x_n и y_n , така че $|x_n - y_n| < \delta_n$, но $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. От теоремата на Болцано–Вайерщрас следва, че съществува подредица $x_{n_k} \rightarrow x$. От $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ следва, че $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x$. От непрекъснатостта на функцията f получаваме, че $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(x)$. Следователно $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$, което противоречи на допускането. \square

Теорема 5.10 може да се формулира удобно чрез понятието осцилация на функция.

Определение 5.11 Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е ограничена функция. Осцилация на функцията f наричаме $\sup_{x \in \Delta} \{f(x)\} - \inf_{x \in \Delta} \{f(x)\}$.



Фигура 63: Georg Ferdinand Philipp Cantor

Георг Кантор (1845–1918) е германец, роден в Санкт Петербург. Той е най-известен с работите си върху теория на множествата. Той открива важната роля на биективните изображения, безкрайните множества и наредените множества. Кантор дефинира мощност на множества и сравнява големината на различните безкрайни множества.

Теорията на Кантор за трансфинитните числа е била толкова шокираща, че редица велики математици, неговии съвременници не са я възприемали. Дори някои теолози са приемали резултатите му за абсолютната безкрайност, като предизвикателство на божията природа. Поанкаре нарича идеите му: “смъртоносна болест” инфектирала математиката, Кронекер го нарича “научен шарлатанин”, “ре-негат” и “развален младеж”. Това негативно отношение се смята за причина за честите депресии, в които изпадал Кантор.

В наши дни голямото мнозинство математици, които не са нито конструктивисти, нито финитисти приемат работата на Кантор върху трансфинитните множества и аритметика, като я смятат за основна смяна на парадигмата. По думите на Давид Хилберт: “Никой няма да ни изгони от Рая, който Кантор създаде”.

През 1904 Кралското общество награждава Кантор със “Sylvester Medal”, най-високото отличие за Кралското общество.

Ако $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, тогава осцилацията ѝ в интервала $[a, b]$ е равна на $\max_{x \in [a, b]} \{f(x)\} - \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$.

Можем да изкажем Теорема 5.10 с помощта на понятието осцилация.

Теорема 5.11 Ако $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че осцилацията на f във всеки интервал с дължина не по-голяма от δ не надминава ε .

Определение 5.12 Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция. Модул на непрекъснатост на f наричаме функцията

$$\omega_{\Delta}(f; \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta, x, y \in \Delta\}.$$

От Определение 5.12 веднага се получават свойствата

$$(13) \quad \omega_{\Delta}(f; \delta) \geq 0$$

и

$$(14) \quad \omega_{\Delta}(f; \delta_1) \geq \omega_{\Delta}(f; \delta_2) \quad \text{за всяко } \delta_1 < \delta_2.$$

Пример 5.41 Пресметнете $\omega_{[0,1]}(x^2; \delta)$.

Нека $x, y \in [0, 1]$ и $|x - y| < \delta$. Следва $x - \delta \leq y \leq x + \delta$. Можем да напишем неравенствата:

$$|x^2 - y^2| \leq |x^2 - (x - \delta)^2| = 2\delta x - \delta^2 \leq 2\delta - \delta^2.$$

Следователно $\omega_{[0,1]}(x^2, \delta) \leq 2\delta - \delta^2 < 2\delta$.

Пример 5.42 Пресметнете $\omega_{(0,1)}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right); \delta\right)$.

От неравенствата

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| + \left|\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right| \leq 1 + 1 = 2$$

получаваме неравенството $\omega_{(0,1)}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right); \delta\right) \leq 2$.

Да изберем редиците $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ и $y_n = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}}$. За всяко $\delta > 0$ съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, така че $0 < x_{n_0}, y_{n_0} < \delta$ и следователно $|x_{n_0} - y_{n_0}| < \delta$. Тогава от равенството

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x_{n_0}}\right) - \sin\left(\frac{1}{y_{n_0}}\right)\right| = \left|\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right)\right| = 1 + 1 = 2$$

следва, че $\omega_{(0,1)}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right); \delta\right) \geq 2$. Следователно $\omega_{(0,1)}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right); \delta\right) = 2$.

Пример 5.43 Пресметнете $\omega_{(0,1)}\left(\frac{1}{x}; \delta\right)$.

Нека $\delta > 0$ е произволно избрано и да положим $y = \delta$. Тогава за всяко $x \in (0, y)$ е изпълнено неравенството $|x - y| \leq \delta$. От неравенството

$$\omega_{(0,1)}\left(\frac{1}{x}; \delta\right) \geq \sup\left\{\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{\delta}\right| : x \in (0, \delta)\right\} = +\infty$$

следва, че $\omega_{(0,1)}\left(\frac{1}{x}; \delta\right) = +\infty$.

От горните три примера виждаме, че модулът на непрекъснатост може да приема всякакви стойности от 0 до $+\infty$. Модулът на непрекъснатост на всяка константна функция е нула.

Теорема 5.12 Функцията $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е равномерно непрекъсната тогава и само тогава, когато $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$.

Доказателство: Нека f е равномерно непрекъснатата. Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta_\varepsilon > 0$, така че за всеки $x, y \in \Delta$, удовлетворяващи $|x - y| < \delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. От (14) следва, че за всяко $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$ е изпълнено неравенството

$$\omega(f, \delta) \leq \omega(f, \delta_\varepsilon) < \varepsilon$$

и следователно $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f : \delta) = 0$.

Нека е изпълнено $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f : \delta) = 0$. Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува δ_ε , така че $\omega(f : \delta) < \varepsilon$ за всяко $\delta \in (0, \delta_\varepsilon)$. От последното неравенство получаваме, че за всеки $x, y \in \Delta$, които удовлетворяват $|x - y| < \delta < \delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(f : \delta_\varepsilon) < \varepsilon.$$

□

ЗАДАЧИ

1) Изследвайте за равномерна непрекъснатост функциите в указаните интервали:

а) $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$; б) $f(x) = \ln x$, $x \in (0, 1)$; в) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in (0, \pi)$;

г) $f(x) = e^x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (0, 1)$; д) $f(x) = \arctg x$, $x \in (-\infty, +\infty)$;

е) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1, +\infty)$; ж) $f(x) = x \sin x$, $x \in [0, +\infty)$;

з) $f(x) = \sin(x^2)$, $x \in (-\infty, +\infty)$; и) $f(x) = x + \sin(x^2)$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

2) Намерете оценка на модула на непрекъснатост във вида $\omega_f(\delta) \leq C\delta^\alpha$, където C и α са константи:

а) $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$; б) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$; в) $f(x) = \sin x + \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

5.9 Отворени покрития

Определение 5.13 Казваме, че редицата от затворени интервали $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^\infty$ е редица от вложени един в друг интервали, ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено включването $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$.

Определение 5.14 Казваме, че редицата от вложени, затворени интервали $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^\infty$ е свиваща система от интервали, ако $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Лема 5.4 Сечението на всяка система от свиващи интервали се състои от единствена точка.

Доказателство: От условието, че $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ е система от свиващи интервали следва, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща и ограничена отгоре и редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е намаляваща и ограничена отдолу. Следователно двете редици са сходящи и от $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ следва, че имат една и съща граница. Нека означим $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. От неравенството $a_n \leq c \leq b_n$, което е изпълнено за всяко $n \in \mathbb{N}$ следва, че $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ и следователно системата $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ има непразно сечение.

Да допуснем, че съществува $d \neq c$, което принадлежи на сечението $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. От неравенството $a_n \leq d, c \leq b_n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ следва, че $|c - d| \leq (b_n - a_n)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, което е невъзможно, понеже $|c - d| > 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$. \square

Определение 5.15 Казваме, че точката $x \in \Delta$ е вътрешна точка за множеството Δ , ако съществува $\delta > 0$, така че $(x - \delta, x + \delta) \subset \Delta$.

Определение 5.16 Казваме, че множеството Δ е отворено, ако се състои само от вътрешни точки.

Пример 5.44 Множествата (a, b) , $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, $(a, b) \cup (c, d)$, $(a, b) \cap (c, d)$ са отворени.

Определение 5.17 Казваме, че множеството Δ е затворено, ако множеството $\mathbb{R} \setminus \Delta$ е отворено.

Пример 5.45 Множествата $[a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, $[a, b] \cup [c, d]$, $[a, b] \cap [c, d]$ са затворени. Множеството $[a, b)$ не е нито отворено, нито затворено.

Определение 5.18 Казваме, че точката x е точка на съгъстяване за множеството $\delta \in \mathbb{R}$, ако съществува редица от точки $x_n \in \Delta$, сходяща към x .

Твърдение 5.2 Множеството $\Delta \subset \mathbb{R}$ е затворено тогава и само тогава, когато съдържа всичките си точки на съгъстяване.

Доказателство: Нека Δ е затворено множество. Ще докажем че всяка точка на съгъстяване на Δ принадлежи на Δ . Да допуснем противното, т.е. съществува $x \in \mathbb{R} \setminus \Delta$, която е точка на съгъстяване на Δ . Следователно съществува редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки на Δ , така че $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. От дефиницията за затворено множество, следва че $\mathbb{R} \setminus \Delta$ е отворено множество и следователно от $x \in \mathbb{R} \setminus \Delta$ получаваме, че съществува $\delta > 0$, така че $(x - \delta, x + \delta) \subset \mathbb{R} \setminus \Delta$. От границата $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N$ е изпълнено неравенството $|x_n - x| < \delta$, т.е. от известно място нататък

цялата редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежи на интервала $(x - \delta, x + \delta) \subset \mathbb{R} \setminus \Delta$, което противоречи на избора на редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Delta$.

Нека сега всяка точна на сгъстяване да принадлежи на Δ . Ще покажем, че при това условие $\mathbb{R} \setminus \Delta$ е отворено множество. Нека $x \in \mathbb{R} \setminus \Delta$. Ще докажем, че съществува $\delta > 0$, така че $(x - \delta, x + \delta) \subset \mathbb{R} \setminus \Delta$. Да допуснем противното, т.е. за всяко $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$ съществува $x_n \in \Delta \cap (x - \delta_n, x + \delta_n)$, което означава, че x е точка на сгъстяване на Δ и следователно $x \in \Delta$, което противоречи на избора на x . \square

Определение 5.19 *Казваме, че системата от отворени множества $\{\sigma_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е отворено покритие на множеството X , ако*

- 1) *за всяко $\gamma \in \Gamma$ множеството σ_γ е отворено;*
- 2) *за всяко $x \in X$ съществува $\gamma \in \Gamma$, така че $x \in \sigma_\gamma$.*

Определение 5.20 *Нека $\{\sigma_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е отворено покритие на множеството X . Казваме, че съществува отворено крайно подпокритие на X , ако съществуват $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma$, така че множеството $\{\sigma_{\gamma_k}\}_{k=1}^n$ е покритие на X .*

Ще докажем една Лема, която има редица приложения в Математическия анализ.

Лема 5.5 *(Хайне–Борел) От всяко отворено покритие на затворения интервал $[a, b]$ може да се избере крайно подпокритие.*

Доказателство: Нека $\Sigma = \{\sigma_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ е отворено покритие на множеството $[a, b]$. Ако системата Σ е крайна, твърдението е в сила.

Нека системата Σ е безкрайна и да допуснем, че не съществува крайно подпокритие. Да разделим интервала на две равни части $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. Поне един от получените интервали не може да се покрие с краен брой интервали от Σ . Продължаваме този процес на деление на половина на интервала, който не може да бъде покрит с краен брой интервали и получаваме редица от вложени един в друг затворени интервали

$$[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_{n-1} \supset I_n \supset \dots,$$

дължините на които клонят към нула. От Лема 5.4 следва, че съществува единствено $c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. От $c \in [a, b]$ следва, че съществува $\sigma_{\gamma_0} \in \Sigma$, така че $c \in \sigma_{\gamma_0}$. От условието, че σ_{γ_0} е отворено множество следва, че съществува $\delta > 0$, така че $(c - \delta, c + \delta) \subset \sigma_{\gamma_0}$. От условието, че дължините на интервалите I_n клонят към нула следва, че съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N$ е изпълнено включването $I_n \subset (c - \delta, c + \delta) \subset \sigma_{\gamma_0}$, което противоречи с конструкцията на редицата $\{I_n\}_{n=0}^{\infty}$, никой от елементите ѝ да не може да бъде покрит с краен брой елементи на Σ . Следователно допускането не е вярно. \square

Феликс Борел (1871 – 1956) е френски математик и политик. Като математик той е най-известен с работата си по теория на мярката и вероятностите. Борел е роден в Saint-Affrique. Той спечелва националното състезание по математика за ученици през 1889. Той завършва висшето си образование в *Ecole Polytechnique* през 1892 и защитава дисертация през 1893. Първоначално работи в университета в Лил, а после става ръководител на катедрата по теория на функциите в *Ecole Normale*.

Заедно с Лебег и Бер, Борел е от пионерите в теория на мярката и приложението ѝ в теория на вероятностите. Борел прави връзката между хиперболичната геометрия и специалната теория на относителността.

Борел е бил член на Френския парламент от 1924 до 1936, бил е министър на моретата. През втората световна война е бил член на френската съпротива.

Важни за Лема 5.5 са и двете условия - интервала $[a, b]$ да бъде както краен и затворен, така и Σ да бъде отворено покритие. Ще илюстрираме това със следните примери.



Фигура 64: Felix Edouard Justine Emile Borel

Пример 5.46 Системата от отворени множества $\left\{\left(\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ образува покритие на интервала $(0, 1]$, но не съществува нейна крайна подсистема, която да е покритие.

Нарушено е условието интервала $(0, 1]$ да бъде затворен.

Пример 5.47 Системата от отворени множества $\{(2n, 2n + 2)\}_{n=0}^{\infty}$ образува покритие на интервала $[1, +\infty)$, но не съществува нейна крайна подсистема, която да е покритие.

Нарушено е условието интервала $[1, +\infty)$ да бъде краен.

Пример 5.48 Системата от отворени множества $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\left[\frac{2^n - 1}{2^n}, \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}\right]\right\}_{n=1}^{\infty}$ образува покритие на интервала $[0, 2]$, но не съществува нейна крайна подсистема, която да е покритие.

Нарушено е условието Σ да бъде отворено покритие.

Ще илюстрираме, как с помощта на Лема 5.5 могат да се докажат няколко от основните теореми за непрекъснати функции.

Доказателство на Теорема 5.5: Нека да допуснем противното: не съществува точка, в която $f(c) = 0$. Тогава за всяко $x \in [a, b]$ съществува $\delta_x > 0$, така че $f(z) \cdot f(x) > 0$ за всяко $z \in [x - \delta_x, x + \delta_x]$. Системата $\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in [a, b]}$ е отворено покритие за $[a, b]$. Следователно съществува нейно крайно подпокритие $\{(x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k})\}_{k=1}^n$. Точката a принадлежи на едно от множествата $\{(x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k})\}_{k=1}^n$. Да приемем, че

$a \in (x_1 - \delta_{x_1}, x_1 + \delta_{x_1})$. Тогава $f(x_1 + \delta_{x_1}) \cdot f(a) > 0$. Точката $x_1 + \delta_{x_1}$ принадлежи на някое от множествата $\{(x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k})\}_{k=2}^n$. Да приемем, че $x_1 + \delta_{x_1} \in (x_2 - \delta_{x_2}, x_2 + \delta_{x_2})$. Тогава $f(x_2 - \delta_{x_2}) \cdot f(x_1 + \delta_{x_1}) > 0$ и $f(x_2 + \delta_{x_2}) \cdot f(x_1 + \delta_{x_1}) > 0$. Следователно $f(a) \cdot f(z) > 0$ за всяко $z \in (x_2 - \delta_{x_2}, x_2 + \delta_{x_2})$. Точката $x_2 + \delta_{x_2}$ принадлежи на някое от множествата $\{(x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k})\}_{k=3}^n$. Да приемем, че $x_2 + \delta_{x_2} \in (x_3 - \delta_{x_3}, x_3 + \delta_{x_3})$. Тогава $f(x_3 - \delta_{x_3}) \cdot f(x_2 + \delta_{x_2}) > 0$ и $f(x_3 + \delta_{x_3}) \cdot f(x_2 + \delta_{x_2}) > 0$. Следователно $f(a) \cdot f(z) > 0$ за всяко $z \in (x_3 - \delta_{x_3}, x_2 + \delta_{x_3})$.

След най-много n стъпки ще получим, че $b \in (x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k})$, за някое $k \leq n$. Тогава получаваме, че $f(z) \cdot f(a) > 0$ за всяко $z \in (x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k})$ и следователно $f(a) \cdot f(b) > 0$, което противоречи на условието на Теорема 5.5 и следователно допускането, че не съществува $c \in [a, b]$, така че $f(c) = 0$ беше погрешно. \square

Доказателство на Теорема 5.7: От непрекъснатостта на f следва, че за всяко $x \in [a, b]$ съществува $\delta_x > 0$, така че $f(x) - 1 < f(z) < f(x) + 1$ за всяко $z \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$. Системата $\{(x - \delta_x, x + \delta_x)\}_{x \in [a, b]}$ е отворено покритие за $[a, b]$. Следователно съществува нейно крайно подпокритие $\{(x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k})\}_{k=1}^n$. Нека да положим $M_k = f(x_k) + 1$ и $m_k = f(x_k) - 1$. Тогава за всяко $x \in [a, b]$ са изпълнени неравенствата

$$m = \min\{m_k, k = 1, \dots, n\} \leq f(x) \leq \max\{M_k, k = 1, \dots, n\} = M.$$

\square

Доказателство на Теорема 5.10: Нека $\varepsilon > 0$. За всяко $x \in [a, b]$ съществува $\delta_x > 0$, така че за всяко $z \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$ е в сила неравенството

$$(15) \quad f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f(z) < f(x) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека разгледаме множествата $\left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right)$. Отново за всяко $z \in \left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right)$ се удовлетворява (15). Системата $\left\{\left(x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right)\right\}_{x \in [a, b]}$ образува крайно покритие на $[a, b]$ и според Лема 5.5 съществува отворено подпокритие $\left\{\left(x_k - \frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k + \frac{\delta_{x_k}}{2}\right)\right\}_{k=1}^n$.

Да положим $\delta = \min\left\{\frac{\delta_{x_k}}{2} : k = 1, 2, \dots, n\right\}$. Нека $z, y \in [a, b]$ са две произволни точки, такива че $|z - y| < \delta$. Съществува x_{i_0} , така че $y \in \left(x_{i_0} - \frac{\delta_{x_{i_0}}}{2}, x_{i_0} + \frac{\delta_{x_{i_0}}}{2}\right)$. От $|x - x_{i_0}| < \frac{\delta_{x_{i_0}}}{2}$ получаваме

$$|z - x_{i_0}| \leq |z - y| + |y - x_{i_0}| < \delta + \frac{\delta_{x_{i_0}}}{2} \leq \delta_{x_{i_0}}$$

и следователно $|f(z) - f(x_{i_0})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогава са в сила неравенствата

$$|f(z) - f(y)| \leq |f(z) - f(x_{i_0})| + |f(x_{i_0}) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

ЗАДАЧИ:

- 1) Казваме, че функцията $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е локално ограничена, ако за всяко $x \in \Delta$ съществува δ_x , така че f е ограничена в затворения интервал $[x - \delta_x, x + \delta_x]$. Докажете, че ако f е локално ограничена в $[a, b]$, то f е ограничена в $[a, b]$.
- 2) Нека $[a, b]$ се съдържа в отворено множество X . Докаже, че за всяко $x \in [a, b]$ съществува $\varepsilon_x > 0$, така че $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$.

6 Производна на функция

Математическият анализ, който разработват Нютон и Лайбниц, събужда множество дискусии и критики, които са били напълно основателни, че основните понятия са неясно формулирани. Успехът на математическия анализ при решаване на множество физични задачи дава увереността на математиците, че идеите развити от Нютон и Лайбниц са верни.

Нека разгледаме свободно падащо тяло. Добре известен е законът за изминатия път $s(t) = \frac{gt^2}{2}$, за време t , измерено в секунди, където g е земното притегляне. Изминатият път от момента t_0 до момента $t_0 + \Delta t$ е равен на

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g(2t_0\Delta t + \Delta t^2)}{2}.$$

Тогава средната скорост за времето Δt е

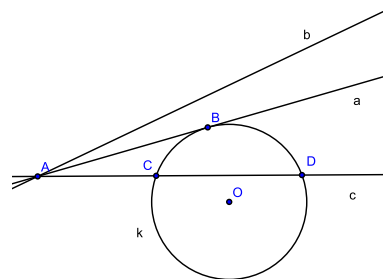
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0 + \frac{g\Delta t}{2}.$$

Както виждаме средната скорост се променя с изменението на Δt и колкото по-малка е стойността на Δt , толкова по-малко е отклонението на скоростта на падащото тяло в момента t_0 . Ако направим граничен преход при $\Delta t \rightarrow 0$, получаваме моментната скорост на падащото тяло

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(gt_0 + \frac{g\Delta t}{2} \right) = gt_0.$$

6.1 Допирателна към крива

От училищния курс е известно понятието допирателна права към окръжност: права, която има точно една обща точка с окръжността, се нарича допирателна. На Фиг. 65 са представени окръжност k , допирателна a към k в точката B , права b , която няма общи точки с k и права c , която има две общи точки с k .

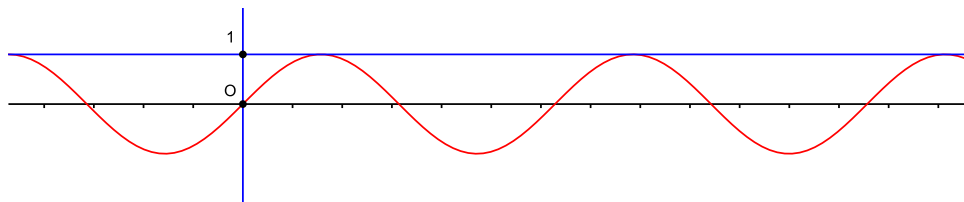


Пример 6.1 Нека разгледаме функцията $y = \sin(x)$.

Видно е, че правата $x = 0$ има единствена обща точка с кривата, но не е допирателна. Също така правата $y = 1$ ма безброй много общи точки с кривата, а допира графиката на функцията (Фиг. 66).

Този пример показва, че дефиницията на допирателна към окръжност не може да се пренесе за произволна крива.

Фигура 65: Допирателна към окръжност

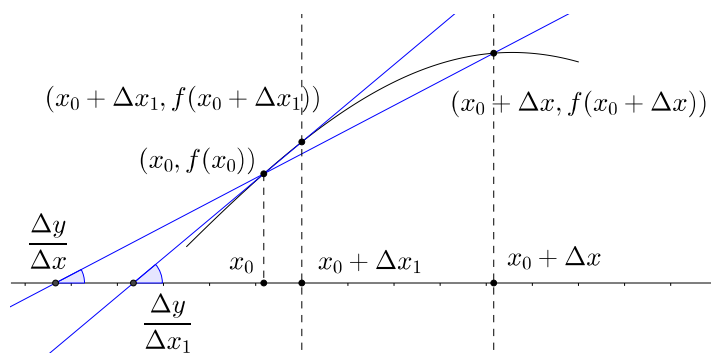


Фигура 66: Допирателна към графиката на функцията $\sin x$

Нека е дадена функцията $f(x)$ и x_0 е произволна точка от нейната дефиниционна област. Нека Δx е нарастването на аргумента. Да разгледаме правата g , минаваща през точките $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, където $y_0 = f(x_0)$ и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. С $\Delta y = \Delta f$ се отбелязва нарастването на функцията f (Фиг. 67). Да пресметнем ъгловия коефициент на правата $g = MM_0$.

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогава уравнението на правата $g = MM_0$, минаваща през точките (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ е $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Фигура 67: Права през две точки от крива

Определение 6.1 Допирателна към кривата $y = f(x)$ в точката (x_0, y_0) наричаме правата, минаваща през точката (x_0, y_0) и имаща ъглов коефициент:

$$(16) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

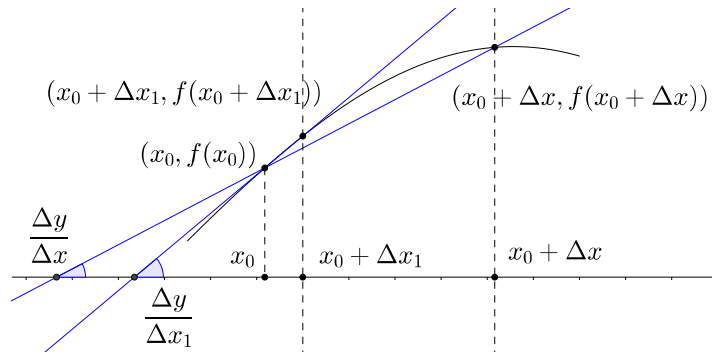
От Определение 6.1 следва, че има криви, които нямат допирателна в дадена точка, защото може да не съществува границата (16).

Пример 6.2 Намерете допирателната в точката $(2, 4)$ към параболата $y = x^2$.

Пресмятаме ъгловия коефициент на допирателната в точката $(2, 4)$.

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = 4.$$

Следователно допирателната има уравнение $y = 4x - 4$ (Фиг. 68).



Фигура 68: Допирателна в точката $(2, 4)$ към графиката на функцията $f(x) = x^2$

Пример 6.3 Намерете допирателната в точката $(3, 1)$ към кривата $y = 3/x$.

Ъгловият коефициент на допирателната към кривата $x/3$ в точката $(3, 1)$ е

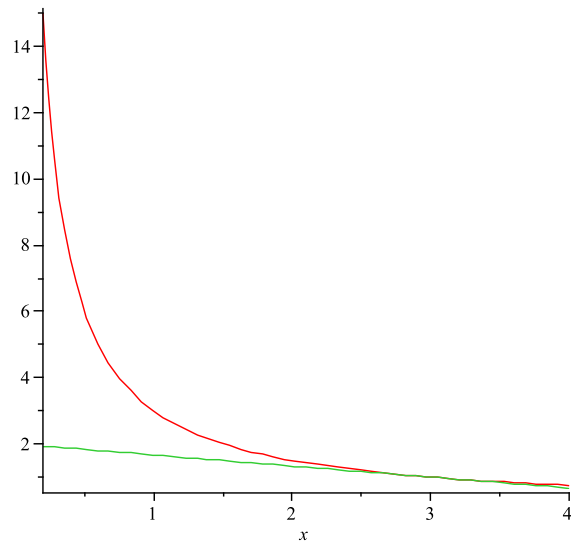
$$\begin{aligned} k &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{3 + \Delta x} - \frac{3}{3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{3 + \Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - (3 + \Delta x)}{3 + \Delta x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x(3 + \Delta x)} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{3 + \Delta x} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

и допирателната има уравнение $x + 3y - 6 = 0$ (Фиг. 69).

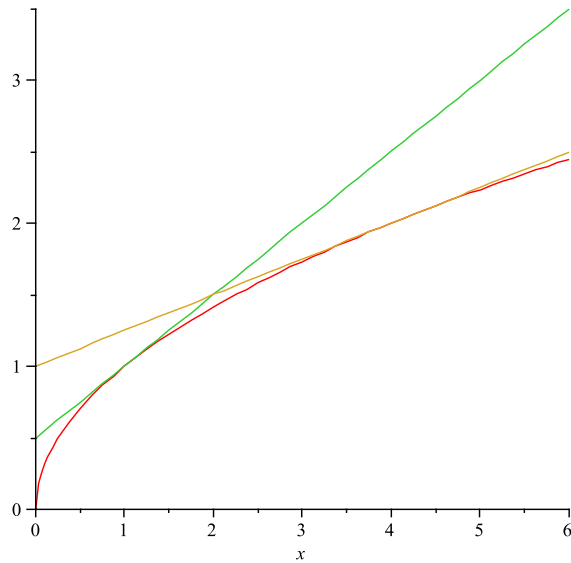
Пример 6.4 Намерете допирателната в точката (a, \sqrt{a}) , $a \in (0, +\infty)$ към кривата $y = \sqrt{x}$.

Ъгловият коефициент на допирателната към кривата \sqrt{x} в точката (a, \sqrt{a}) е

$$\begin{aligned} k &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + \Delta x} - \sqrt{a}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + \Delta x} - \sqrt{a}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{a + \Delta x} + \sqrt{a}}{\sqrt{a + \Delta x} + \sqrt{a}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a + \Delta x - a}{\Delta x(\sqrt{a + \Delta x} + \sqrt{a})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{a + \Delta x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$



Фигура 69: Допирателна в точката $(3, 1)$ към графиката на функцията $f(x) = \frac{3}{x}$



Фигура 70: Допирателни в точките $(1, 1)$ и $(4, 2)$ към графиката на функцията $f(x) = \sqrt{x}$

Така получаваме, че в точката $(1, 1)$, ъгловият коефициент е равен на $1/2$, в точката $(4, 2)$ е $1/4$. Допирателните в точките $(1, 1)$ и $(4, 2)$ са съответно $x - 2y + 1 = 0$ и $x - 4y - 4 = 0$ (Фиг.70).

Ще илюстрираме как с помощта на *Maple* да пресмятаме уравнения на допирателни

към крива.

$$f := x \rightarrow \sqrt{x};$$

$$x \rightarrow \sqrt{x};$$

$$g := a \rightarrow \text{limit} \left(\frac{f(a+x) - f(a)}{x}, x=0 \right);$$

$$a \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+x) - f(a)}{x} \right);$$

$$y := x \rightarrow k \cdot x + b;$$

$$x \rightarrow kx + b;$$

$$u1 := 1;$$

$$s1 := \text{solve}(g(u1) \cdot u1 + b = f(u1), b);$$

$$u2 := 4;$$

$$s2 := \text{solve}(g(u2) \cdot u2 + b = f(u2), b);$$

$$g(u1) \cdot x + s2;$$

$$g(u2) \cdot x + s2;$$

$$1;$$

$$\frac{1}{2};$$

$$4;$$

$$1;$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}x + 1;$$

$$4$$

Задачи:

1) Намерете ъгловия коефициент на допирателната в точките $(1, f(1))$, $(2, f(2))$ и $(0, f(0))$ на функцията f и запишете уравнението ѝ:

а) $f(x) = 4x - x^2$; б) $f(x) = x - x^3$; в) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; г) $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.

2) Намерете в коя точка $(a, f(a))$ допирателната към графиката на функцията f сключва с координатната ос O_x ъгъл 0° , 30° , 45° , 60° , 90° :

а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = x^3$; в) $f(x) = x^3 + x$; г) $f(x) = x^2 - x$.

6.2 Дефиниция на производна

Разглеждайки различни задачи, ние стигнахме до граница от вида

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение 6.2 Казваме, че функцията f има производна в точката x_0 , ако същес-

твърди границата

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

която наричаме производна на функцията f в точката x_0 и я означаваме с $f'(x_0)$.

Пример 6.5 Намерете производната на функцията $y = x$ за всяко $x_0 \in \mathbb{R}$.

Очевидно

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Следователно $(x)' = 1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Ще отбележим, че производната на функция в дадена точка $f'(x_0)$ е число.

Пример 6.6 Намерете производната на функцията $y = x^2$ за всяко $x_0 \in \mathbb{R}$.

Очевидно

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0. \end{aligned}$$

Следователно $(x^2)' = 2x$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Така например $f'(2) = 4$, а $f'(1/2) = 1$ (Фиг. 71).

Можем да пресмятаме производна на функция с помощта на *Maple*:

$f := x \rightarrow x^2;$

$x \rightarrow x^2;$

$g := a \rightarrow \text{limit} \left(\frac{f(a+x) - f(a)}{x}, x = 0 \right);$

$a \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+x) - f(a)}{x} \right);$

$g(a);$

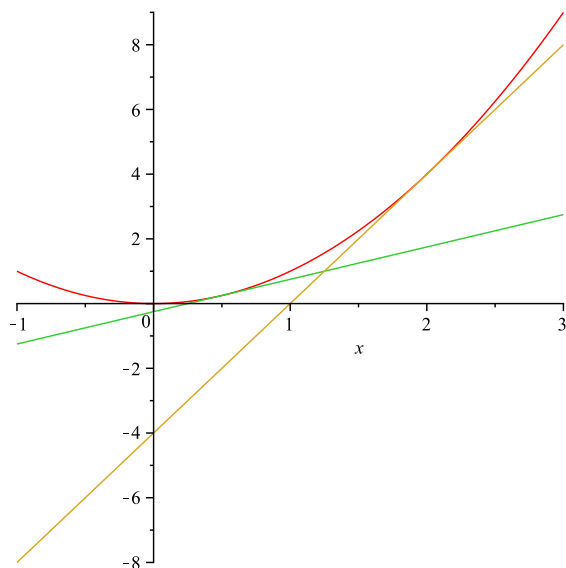
$2a;$

Продуктът *Maple* дава възможност за по-лесно пресмятане на производни с командите $\text{diff}(f(x), x)$ и $D(f)$.

$f := x \rightarrow x^2;$

$x \rightarrow x^2;$

Операторът $\text{diff}(f(x), x)$ намира производната на функцията f спрямо променливата x , но не присвоява стойност функция и за това има ограничени възможности за използване при пресмятания, свързани с производната на функцията.



Фигура 71: Допирателни в точките $(2, 4)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ към графиката на функцията $f(x) = x^2$

```
g1 := diff(f(x), x);
2x;
```

Операторът $D(f)$ намира производната на функцията f и присвоява стойност функцията, която може да се използва като функция за други пресмятания

```
f1 := D(f);
x → 2x;
```

Ще използваме оператора $D(f)$ за построяване на допирателните от (Фиг. 71) където $f(x) = x^2$ и $f1 := D(f)$:

```
u1 := 2;
s1 := solve(f1(u1) · u1 + b = f(u1), b);
u2 := 1/2;
s2 := solve(f1(u2) · u2 + b = f(u2), b);
plot({f1(u1) · x + s1, f1(u2) · x + s2, f(x)}, x = -1..3);
```

ЗАДАЧИ:

1) Намерете производната в произволна точка x на функцията f :

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$; в) $f(x) = x^3 + 2x$; г) $f(x) = x^2 - x^3$.

2) Намерете допирателната в точките $(1, f(1))$, $(2, f(2))$ и $\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ на функцията f :

а) $f(x) = x^3 + 1$; б) $f(x) = \frac{2}{x} + x$; в) $f(x) = x^3 + 2x - x$; г) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

6.3 Основни теореми за производна на функция

Теорема 6.1 Ако една функция има производна в точката x_0 , то тя е непрекъсната в тази точка.

Доказателство: Очевидно

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Delta x = f'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0.$$

□

Със следващия пример ще покажем, че обратното твърдение на Теорема 6.1 не е вярно.

Пример 6.7 Функцията $f(x) = |x|$ е непрекъсната за всяко $x \in \mathbb{R}$, но няма производна в точката 0.

Наистина от

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Веднага се вижда, че не съществува границата на диференчното частно в точката 0 (Фиг. 72). Следователно не съществува допирателна в точката $(0, 0)$.

Теорема 6.2 Производната на константната функция е равна на 0.

Доказателство: Нека $f(x) \equiv c$. Тогава за всяко x_0

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

□

Теорема 6.3 Производната на $f(x) = x^n$, за всяко $n \in \mathbb{N}$ е равна на nx^{n-1} .

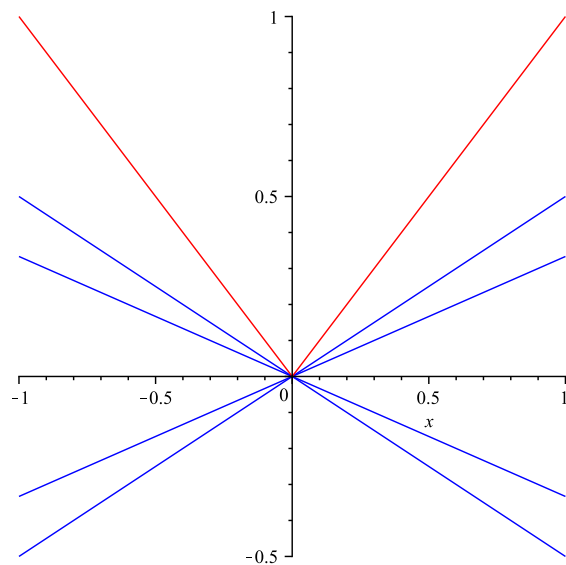
Доказателство: За всяко x_0 имаме

$$(x_0 + \Delta x)^n = \binom{n}{0} x_0^n + \binom{n}{1} x_0^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x_0^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x_0 (\Delta x)^{n-1} + \binom{n}{n} (\Delta x)^n.$$

Тогава

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\binom{n}{1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} \Delta x + \dots + \binom{n}{n} (\Delta x)^{n-1} \right) = nx_0^{n-1}.$$

□



Фигура 72: „Допирателни“ прави в точките $(0, 0)$ към графиката на функцията $f(x) = |x|$

Теорема 6.4 *Нека f има производна в точката x_0 и $a \in \mathbb{R}$. Тогава функцията $F(x) = af(x)$ има производна в точката x_0 и $F'(x_0) = af'(x_0)$.*

Доказателство:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{af(x_0 + \Delta x) - af(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = af'(x_0). \end{aligned}$$

□

Пример 6.8 *Намерете производната на $5x^3$.*

Използвайки последователно Теорема 6.4 и Теорема 6.3 получаваме: $(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$.

Теорема 6.5 *Нека f и g имат производна в точката x_0 . Тогава $f + g$ и $f - g$ имат производна в точката x_0 и*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

Доказателство: Да положим $F = f + g$. Тогава

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

Доказателството за $F = f - g$ протича аналогично. □

Пример 6.9 Намерете производната на $x^2 - 3x^5 + x^3$.

Използвайки последователно Теорема 6.5, Теорема 6.4 и Теорема 6.3 получаваме:

$$(x^2 - 3x^5 + x^3)' = (x^2)' - (3x^5)' + (x^3)' = (x^2)' - 3(x^5)' + (x^3)' = 2x - 15x^4 + 3x^2.$$

Теорема 6.6 Нека f и g имат производна в точката x_0 . Тогава:

- 1) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$;
- 2) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$ при $g(x_0) \neq 0$.

Доказателство: Съгласно Теорема 6.1 функцията g е непрекъсната в точката x_0 .

- 1) Да положим $F = fg$.

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + f(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).\end{aligned}$$

- 2) Първо ще пресметнем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} = - \frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Тогава намираме

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

□

Пример 6.10 Намерете производната на $(x^2 - x) \cdot (x^3 + 3)$ и на $(x^2 - x)/(x^3 + 3)$.

Използвайки последователно Теорема 6.6 получаваме:

$$\left((x^2 - x) \cdot (x^3 + 3)\right)' = (x^2 - x)' \cdot (x^3 + 3) + (x^2 - x) \cdot (x^3 + 3)' = (2x - 1) \cdot (x^3 + 3) + (x^2 - x) \cdot 3x^2.$$

и

$$\left(\frac{x^2 - x}{x^3 + 3}\right)' = \frac{(x^2 - x)' \cdot (x^3 + 3) - (x^2 - x) \cdot (x^3 + 3)'}{(x^3 + 3)^2} = \frac{(2x - 1) \cdot (x^3 + 3) + (x^2 - x) \cdot 3x^2}{(x^3 + 3)^2}.$$

Производни, за намирането на които се изискват множество пресмятания, се намират с помощта на *Maple* без затруднения.

$$f := x \rightarrow \frac{x \cdot (x - 1)^3 \cdot (x - 2)^3}{(x + 2)^2 - (x + 3)^3};$$

$$x \rightarrow \frac{x(x - 1)^3(x - 2)^3}{(x + 2)^2 - (x + 3)^3};$$

$$g1 := diff(f(x), x);$$

$$\frac{3x(x - 1)^2(x - 2)^3}{(2 + x)^2 - (x + 3)^3} + \frac{(x - 1)^3(x - 2)^3}{(2 + x)^2 - (x + 3)^3} + \frac{3x(x - 1)^3(x - 2)^2}{(2 + x)^2 - (x + 3)^3} - \frac{x(x - 1)^3(x - 2)^3(4 + 2x - 3(x + 3)^2)}{((2 + x)^2 - (x + 3)^3)^2}$$

$$factor(g1);$$

$$\frac{(x - 1)^2(x - 2)^2(-62x^2 + 86x^3 + 37x^4 + 4x^5 - 276x + 46)}{(23 + 23x + 8x^2 + x^3)^2}$$

ЗАДАЧИ:

1) Пресметнете производната на функцията f :

а) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x - 1$; б) $f(x) = (x - 1) \cdot (x + 1)^2$; в) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$; г) $\frac{1}{x} - \frac{x^2 + 1}{x - 1} + 5x$.

6.4 Диференцируемост на функция

Определение 6.3 Казваме, че функцията f е диференцируема в точката x_0 , ако съществува $A \in \mathbb{R}$, така че нарастването Δf в тази точка може да се представи във вида

$$(17) \quad \Delta f = A\Delta x + o(\Delta x).$$

Твърдение 6.1 Една функция има производна в точката x_0 тогава и само тогава, когато тя е диференцируема в тази точка и $A = f'(x_0)$.

Доказателство: Нека функцията f има производна в точката x_0 . Тогава

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = 0,$$

което означава, че функцията $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x$ е безкрайно малка от по-висок ред от Δx и следователно можем да я запишем, като

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = o(\Delta x),$$

т.е. във вида (17).

Обратно, нека функцията f е диференцируема, тогава от (17) получаваме

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

□

Теорема 6.7 Ако функцията g има производна в точката x_0 и функцията f има производна в точката $g(x_0)$, тогава съставната функция $f(g(x))$ има производна в точката x_0 и тя е равна на $(f(g(x)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Доказателство: Нека положим $F(x) = f(g(x))$. От диференцируемостта на функцията g в точката x_0 следва, че g е непрекъсната в x_0 и следователно $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = 0$.

Тогава

$$\Delta f = f'(g(x_0))\Delta g + o(\Delta g)$$

и

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(g(x_0))\Delta g + o(\Delta g)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(g(x_0))\Delta g}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{o(\Delta g)}{\Delta x} \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \alpha(\Delta g) \\ &= f'(g(x_0))g'(x_0) + g'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta g) = f'(g(x_0))g'(x_0), \end{aligned}$$

където $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$.

□

Теорема 6.8 Нека функцията $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е строго монотонна и нека $g(y)$ е нейната обратна функция. Ако функцията f е диференцируема в точката $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) \neq 0$, тогава g е диференцируема в точката $y_0 = f(x_0)$ и $g(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказателство: Ще покажем, че функцията $g(y)$ е диференцируема в точката y_0 . Полагаме $\Delta x = \Delta g = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$. Тогава $y_0 + \Delta y = f(g(y_0 + \Delta y)) = f(x_0 + \Delta x)$ и следователно $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$. От Теорема 5.3 следва, че g съществува и е непрекъсната в точката y_0 , което означава, че $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0$. От строгата монотонност следва, че $\Delta y \neq 0$ и $\Delta x \neq 0$. Така получаваме:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Пример 6.11 Намерете производната на функцията $y = \sqrt{x}$.

След повдигане на квадрат получаваме $y^2 = x$ или $x = g(y) = y^2$. Тогава $g'(y) = 2y$ и съгласно Теорема 6.8 получаваме

$$y'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 6.12 Намерете производната на функцията $y = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

След повдигане на квадрат получаваме $y^2 = \frac{x+1}{x+2}$ или $x = g(y) = \frac{1-2y^2}{y^2-1}$. Тогава $g'(y) = \frac{2y}{(y^2-1)^2}$ и съгласно Теорема 6.8 получаваме

$$y'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{2y}{(y^2-1)^2}} = \frac{(y^2-1)^2}{2y} = \frac{1}{2(x+2)^2} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}.$$

ЗАДАЧИ:

1) Намерете производните:

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; б) $f(x) = \sqrt[n]{x}$; в) $f(x) = \sqrt{1+x}$;

г) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$; д) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$; е) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

2) Намерете производните:

а) $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2+x^3}$; б) $f(x) = \sqrt[n]{x^2+2}$; в) $f(x) = \sqrt{1+x+\frac{1}{x}}$;

г) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2}$; д) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3}{x-2}}$; е) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.

6.5 Производни на елементарните функции

Твърдение 6.2 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Доказателство:

$$\frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0)}{\Delta x} = \frac{x_0}{x_0 \Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right) = \frac{1}{x_0} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}.$$

Нека положим $t = \Delta x/x_0$. От границата $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e$ и непрекъснатостта на функцията $\ln x$ получаваме

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x_0} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} \right)^{\frac{x_0}{\Delta x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{x_0} \ln(1+t)^{1/t} = \frac{1}{x_0} \ln e = \frac{1}{x_0}.$$

□

Твърдение 6.3 $(e^x)' = e^x$.

Доказателство: Да разгледаме функцията $f(x) = y = e^x$. Нейната обратна функция е $g(y) = x = \ln y$. Тогава съгласно Теорема 6.8

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1/y} = y = e^x.$$

□

Следствие 6.1 $(a^x)' = a^x \ln a$, $(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x}$.

Доказателство: Съгласно Теорема 6.7 и Твърдение 6.3 получаваме:

$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a.$$

Съгласно Теорема 6.7 и Твърдение 6.2 получаваме:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}.$$

□

Твърдение 6.4 $(x^a)' = ax^{a-1}$ за всяко $a \in \mathbb{R}$.

Доказателство: От представянето $x^a = e^{a \ln x}$ след диференциране получаваме

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} (a \ln x)' = \frac{ae^{a \ln x}}{x} = ax^{a-1}.$$

□

Твърдение 6.5 $(\sin x)' = \cos x$ и $(\cos x)' = -\sin x$ за всяко $a \in \mathbb{R}$.

Доказателство:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x.$$

□

Твърдение 6.6 $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ и $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Доказателство:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

□

Твърдение 6.7

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Доказателство: Нека да разгледаме функцията $f(x) = y = \arcsin x$. Нейната обратна функция е $g(y) = x = \sin y$. Тогава съгласно Теорема 6.8

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

ЗАДАЧИ:

1) Намерете производните:

а) $f(x) = x^x$; б) $f(x) = \sqrt[x]{x}$; в) $f(x) = \log_a(\sin x)$;

г) $f(x) = \frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt[3]{x}}$; д) $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + \sin^2 x)$; е) $e^{x^3 + \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)}$.

2) Намерете производната на обратната функция на f :

а) $f(x) = x^3 + 1$; б) $f(x) = \sin(x^2)$; в) $f(x) = \ln(x^2 + x)$.

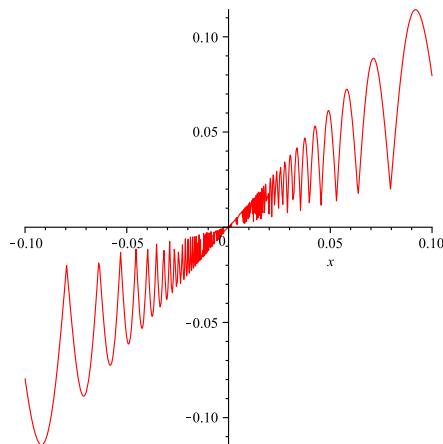
6.6 Основни свойства на диференцируемите функции

От информацията за производната на дадена функция можем да правим изводи за поведението и свойствата на самата функция.

Определение 6.4 Казваме, че функцията f е растяща (намаляваща) в точката c , ако съществува $\delta > 0$, така че за всеки x_1, x_2 , удовлетворяващи $c - \delta < x_1 < c < x_2 < c + \delta$ е в сила неравенството: $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(c) > f(x_2)$).

Пример 6.13 Функцията $f(x) = x \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| + \frac{x}{4}$ е растяща в точката 0 (Фиг. 73).

Функцията $f(x) = x \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right|$ не е растяща в точката 0 (Фиг. 74).



Фигура 73: Графика на функцията $f(x) = x \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| + \frac{x}{4}$

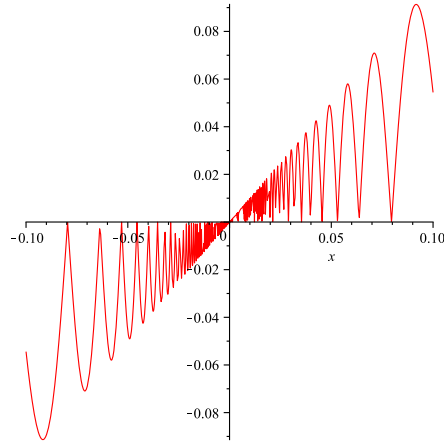
Лема 6.1 Нека функцията $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $c \in (a, b)$. Тогава:

- 1) ако $f'(c) > 0$, то f е растяща в c ;
- 2) ако $f'(c) < 0$, то f е намаляваща в c .

Доказателство: Ще докажем 1). Доказателството на 2) протича аналогично.

От съществуването на производна в точката c получаваме неравенството

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) > 0.$$



Фигура 74: Графика на функцията $f(x) = x \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right|$

От определението за граница по Коши следва, че за $\varepsilon = f'(c) > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко $|x - c| < \delta$ е в сила неравенството:

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon,$$

т.е.

$$0 < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 2f'(c)$$

за всяко $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Следователно $f(x) > f(c)$ за $x \in (c, c + \delta)$ и $f(x) < f(c)$ за $x \in (c - \delta, c)$. \square

Нека отбележим, че функцията $f(x) = x^3$ е растяща в точката $x = 0$, но $f'(0) = 0$. Това показва, че условията в Теорема 6.1 са достатъчни, но не са необходими.

Определение 6.5 Казваме, че функцията f има локален максимум (минимум) в точката c , ако съществува $\delta > 0$, така че за всяко $x \in (c - \delta, c + \delta)$ е в сила неравенството

$$(18) \quad f(x) \leq f(c) \quad (f(x) \geq f(c)).$$

Определение 6.6 Казваме, че функцията f има локален екстремум в точката c , ако c е точка или на локален максимум, или на локален минимум.

Ако в (18) са изпълнени строги неравенства при $x \neq c$ казваме, че функцията f има строг локален максимум (минимум).

Теорема 6.9 (на Ферма) Нека функцията $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, където Δ е произволен интервал (отворен, затворен или полуотворен) с краища a и b , е диференцируема в точката $c \in (a, b)$. Ако f има локален екстремум в c , тогава $f'(c) = 0$.

Доказателство: По условие съществува $f'(c)$ и в точката с функцията f не е нито растяща, нито намаляваща. Съгласно Теорема 6.1 производната $f'(c)$ не може да бъде нито положителна, нито отрицателна. Следователно $f'(c) = 0$. \square



Фигура 75: Pierre de Fermat

Пьер дьо Ферма (1601–1665) е френски юрист в Парламента на Тулуза и математик с голям принос в развитието на съвременния математически анализ и теорията на числата. Роден е в Бомон дьо Ломан, Лангедок, Франция.

Ферма е предшественик на диференциалното смятане със своя метод за намиране на най-голяма и най-малка ордината на крива. Неговите блестящи изследвания в теория на числата го издигат до основател на съвременната теория в тази област. Той има и значим принос към аналитичната геометрия и теория на вероятностите. Нека споменем, че Ферма е открил закона, че светлината се движи по пътя, който отнема най-малко време.

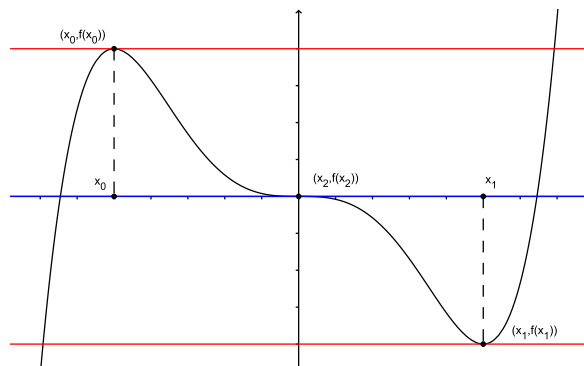
Исаак Нютон пише, че неговите ранни идеи за диференциалното смятане идват директно от Метода на Ферма за построяване на допирателни.

Ферма е известен в цял свят със своята Велика теорема (наричана още Последна (или Голямата) теорема на Ферма), която остава векове с непотвърдено доказателство.

От геометричната интерпретация на понятието производна следва, че при условията на Теорема 6.9 съществува $c \in (a, b)$, така че допирателната към графиката на функцията е успоредна на координатната ос O_x .

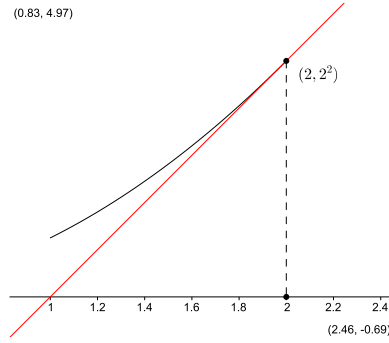
Нека отбележим, че функцията $f(x) = x^3$ няма екстремум в точката $x = 0$, въпреки, че $f'(0) = 0$. Това показва, че анулирането на производната е само необходимо условие в Теорема 6.9. На Фиг. 76 е изобразена функцията $f(x) = \frac{6x^5}{5} - 2x^3$, която има локален максимум в $x_0 = -1$, локален минимум в $x_1 = 1$ и в $x_2 = 0$ производната ѝ е нула, но няма локален екстремум.

Условието $c \in (a, b)$ е съществено, както се вижда от следния пример. Нека разгледаме функцията $x^2 : [1, 2]$ Фиг. 77. Тя достига най-голямата си стойност в 2, но производната ѝ не става нула в 2.



Фигура 76: Функцията $f(x) = \frac{6x^5}{5} - 2x^3$

Определение 6.7 Казваме, че функцията $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ има лява (дясна) производна в точката $c \in X$, ако съществува границата $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ при $\Delta x < 0$ ($\Delta x > 0$). и я означаваме с $f'_-(c)$ ($f'_+(c)$).



Фигура 77: Функцията $f(x) = x^2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

Определение 6.8 Казваме, че функцията f е растяща (намаляваща) отляво в точката c , ако съществува $\delta > 0$, така че за всяко x_1 , удовлетворяващо $c - \delta < x_1 < c$ е в сила неравенството: $f(x_1) < f(c)$ ($f(x_1) > f(c)$).

Определение 6.9 Казваме, че функцията f е растяща (намаляваща) отдясно в точката c , ако съществува $\delta > 0$, така че за всяко x_2 , удовлетворяващо $c < x_2 < c + \delta$ е в сила неравенството: $f(c) < f(x_2)$ ($f(c) > f(x_2)$).

Лесно се съобразява, че ако функцията f има лява производна в точката c , тогава

- 1) ако $f'_-(c) > 0$ то f е растяща в c отляво;
- 2) ако $f'_-(c) < 0$ то f е намаляваща в c отляво.

Аналогично, ако функцията f има дясна производна в точката c , тогава

- 1) ако $f'_+(c) > 0$ то f е растяща в c отдясно;
- 2) ако $f'_+(c) < 0$ то f е намаляваща в c отдясно.

Теорема 6.10 (Дарбу) Нека функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема във всяка точка от интервала $[a, b]$, като под $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ разбираме съответно лява и дясна производна. Тогава f' приема всяка от стойностите, заключени между $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$.

Доказателство: Нека първо да допуснем, че $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ имат различни знаци, например $f'_+(a) > 0$ и $f'_-(b) < 0$.

Ще докажем: съществува $c \in (a, b)$, така че $f'(c) = 0$. От съществуването на производната $f'(x)$ за всяко $x \in [a, b]$ следва, че f е непрекъсната в интервала $[a, b]$. Според Теорема 5.8 следва, че f достига своята най-голяма стойност в някоя точка c . Точката c не може да съвпада с a или b , защото според Лема 6.1 функцията е растяща в точката a и намаляваща в точката b . Така от $c \in (a, b)$ и Теорема 6.9 получаваме, че $f'(c) = 0$.

Нека сега $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$ са произволни. Без да се ограничава общостта на разглежданията можем да приемем, че $f'_-(b) < C < f'_+(a)$. Дефинираме функцията $g(x) = f(x) - Cx$. Тя е непрекъсната и има производна $g'(x) = f'(x) - C$. От неравенствата $g'_-(b) = f'_-(b) - C < 0 < g'_+(a) = f'_+(a) - C$ следва, че съществува $c \in (a, b)$, така че $0 = g'(c) = f'(c) - C$, т.е. $f'(c) = C$. \square

Дарбу има редица приноси в геометрията и математическия анализ. През 1884, Дарбу е избран за член на Académie des Sciences. През 1900 той е назначен за секретар на математическата секция на академията.

През 1902 е избран за член на Royal Society, а през 1916 получава "Sylvester Medal" от обществото.

Неговото име носят редица специални понятия в математиката: Уравнение на Дарбу, Интеграл на Дарбу, Функция на Дарбу, Трансформация на Дарбу и много други.



Фигура 78: Jean-Gaston Darboux

Теорема 6.11 (Рол) Нека функцията f е непрекъсната в $[a, b]$, диференцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува $\xi \in (a, b)$, така че $f'(\xi) = 0$.

Доказателство: От Теорема 5.8 следва че f достига своя максимум M и минимум m в точки от интервала $[a, b]$. Ако $M = m$, то f е константа и следователно $f'(\xi) = 0$ за всяко $\xi \in (a, b)$. Нека $m < M$. Тогава от $f(a) = f(b)$ следва, че f достига в някоя вътрешна точка $\xi \in (a, b)$ поне една от стойностите M или m . Следователно f има локален екстремум в ξ и съгласно Теорема 6.9 $f'(\xi) = 0$. \square

Теорема 6.11 има следната геометрична интерпретация: ако координатите на точките от кривата f в краищата на интервала са равни, то съществува поне една точка $\xi \in (a, b)$, така че допирателната в тази точка да е успоредна на оста O_x (Фиг. 79).

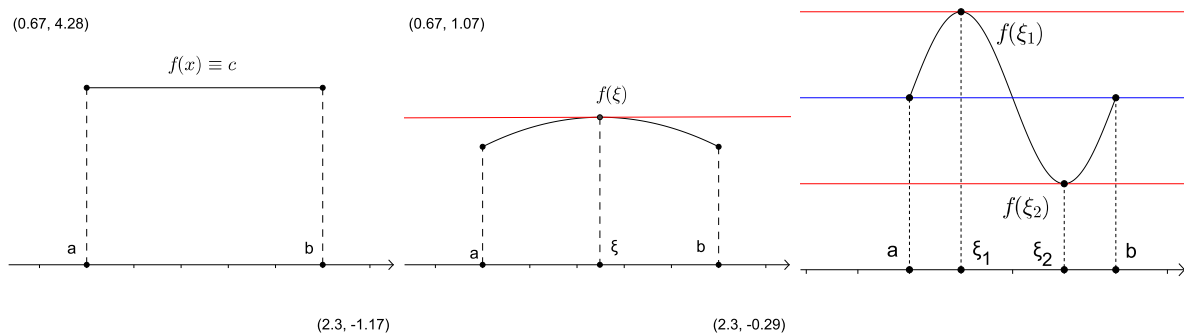
Нека отбележим, че всичките условия на Теорема 6.11 са съществени. Например: функцията $f(x) = x - [x]$ е диференцируема в $(0, 1)$ и $f(0) = f(1) = 0$, но тя не е непрекъсната; Функцията $f = |x|$ е непрекъсната в интервала $[-1, 1]$ и $f(-1) = f(1) = 1$ но тя не е диференцируема в $(-1, 1)$; Функцията $f(x) = x$ не удовлетворява условието $f(0) = f(1)$.

Michel Rolle (1652–1719) е френски математик. Той въвежда означението $\sqrt[n]{a}$. През 1685 е избран за член на Académie Royale des Sciences и става Pensionnaire Géometre на академията през 1699. Това е изключително постижение, защото измежду 70-члена на академията по това време само 20 от тях получават заплата. По това време, той вече е спечелил пенсия от Jean-Baptiste Colbert за решаването на една от задачите на Jacques Ozanet.



Фигура 80: Michel Rolle

Първоначално Рол е критичен към математическия анализ. Считал, че е неточен и основан на необосновани предположения. По-късно той сменя мнението си.



Фигура 79: Различни случаи на Теоремата на Рол

Пример 6.14 Нека функцията $s = f(t)$ описва разстоянието от земята в момента t на хвърлен нагоре обект. Нека в два различни момента a и b обектът се е намирал на едно и също място (едно и също разстояние от земята $f(a) = f(b)$). Тогава съществува момент t_0 , в който скоростта на обекта е била нула.

Ще приложим Теорема 6.11 към функцията $s = f(t)$, описваща позицията на хвърления обект. Според Теоремата на Рол съществува $\xi \in (a, b)$, така че $f'(\xi) = 0$, т.е. има скорост 0, защото $v(t) = f'(t)$.

Пример 6.15 Докажете, че уравнението $x^3 + x - 1 = 0$ има точно един корен.

От Теорема 5.6 получаваме, че уравнението има поне един корен, защото $-1 = f(0) < 0 < 1 = f(1)$ и $f(x) = x^3 + x - 1$ е непрекъсната функция.

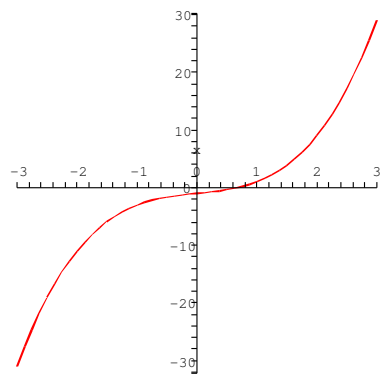
Нека допуснем, че уравнението има повече от един корен, т.е. съществуват $a, b \in \mathbb{R}$, така че $f(a) = f(b) = 0$. Тогава от Теоремата на Рол следва, че съществува $c \in (a, b)$, така че $f'(c) = 0$. Това обаче е невъзможно, защото $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Следователно допускането, че уравнението има повече от един корен не е вярно.

Ще разгледаме пример с по-сложни пресмятания, където Maple улеснява изследването.

Пример 6.16 Докажете, че уравнението

$$(19) \quad 6x^2e^x - 6xe^x + 122e^x + 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12 = 0$$

има точно един корен.



Фигура 81: Графика на функцията $f(x) = x^3 + x - 1$

Дефинираме функцията $f(x) = 6x^2e^x - 6xe^x + 122e^x + 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

$f := x \rightarrow 6x^2e^x - 6xe^x + 122e^x + 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12;$

$x \rightarrow 6x^2e^x - 6xe^x + 122e^x + 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

От границите

$\text{limit}(f(x), x = -\text{infinity});$

$-\infty$

$\text{limit}(f(x), x = +\text{infinity});$

$+\infty$

следва, че уравнението $f(x) = 0$ има поне един корен. Намираме $f'(x)$.

$f1 := D(f);$

$x \rightarrow 6x^2e^x + 6e^xx + 6e^x + 6x^2 + 6x + 6$ Можем да продължим решението по два начина:

1) решаваме неравенството $f'(x) > 0$

$\text{solve}(f1(x) > 0);$

x

Отговорът x означава, че неравенството (или ако се решава уравнение) е изпълнено за всяко x .

2) преобразуваме $f'(x)$ с отделяне на множители

$\text{factor}(f1(x));$

$6(x^2 + x + 1)(e^x + 1)$

Веднага забелязваме, че $f'(x) = 6(x^2 + x + 1)(e^x + 1)$ е по-голямо от нула за всяко x . Следователно производната не може да стане нула. Да допуснем, че уравнението (19) има повече от едно решения, т.е. съществуват $x_1 < x_2$, така че $f(x_i) = 0$. Тогава от Теорема 6.11 следва, че съществува $\xi \in (x_1, x_2)$, така че $f'(\xi) = 0$, което противоречи на доказаното вече $f'(x) \neq 0$.

Теорема 6.12 (за крайните нараствания на Лагранж) Нека функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и е диференцируема в отворения интервал (a, b) . Тогава съществува $c \in (a, b)$, така че

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказателство: Нека дефинираме функцията h , като разликата на функциите f и функцията y , задаваща отсечката AB , където $A = (a, f(a))$ и $B = (b, f(b))$. Отсечката с краища

точките A и B се задава с уравнението: $y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ (Фиг. 82). Тогава

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Веднага се съобразява, че h е непрекъсната в $[a, b]$, диференцируема в (a, b) и

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

За да приложим Теоремата на Рол остава да покажем, че $h(a) = h(b)$. Наистина

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

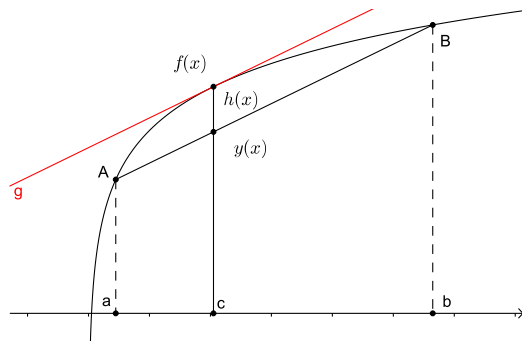
$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Следователно съществува $c \in (a, b)$, така че $h'(c) = 0$, т.е.

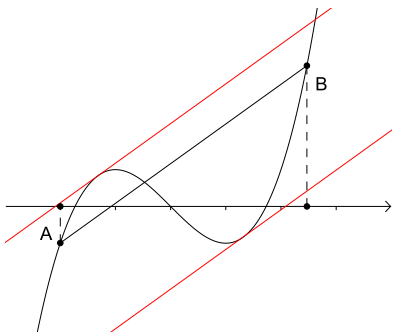
$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

или

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Фигура 82: Теорема на Лагранж



Фигура 83: Теорема на Лагранж

Геометрично Теоремата на Лагранж казва, че съществува точка $c \in (a, b)$, така че допирателната към графиката на функцията в точката $(c, f(c))$ е успоредна на правата AB . Нека да отбележим, че точките c и съответно правите успоредни на AB (виж Теорема 6.12) могат да са повече от една (Фиг. 83).

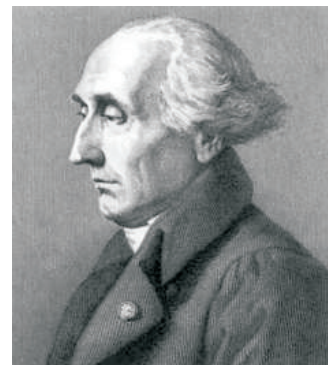
Лагранж (1736–1813) е роден в Торино и получава висшето си образование в тамошното артилерийско училище. Още преди да го завърши, започва да преподава математика там. Под влияние на книгата на Едмънд Халей "За преимуществото на аналитичния метод" Лагранж започва да прави изследвания в областта на математическия анализ. През 1754 г. организира другите преподаватели в школата в малко научно дружество, което по-късно се превръща в Торинска академия на науките. Особен интерес представлява мемоарът "За разпространението на звука" от 1759 г. Преди него над проблема работят Исаак Нютон, Брук Тейлър, Леонард Ойлер, Жан Даламбер, Йохан Бернули,

но едва Лагранж намира правилното решение. Признание му спечелва и ръкописът "Способи за намирането на най-големите и най-малките величини на интегралите". Когато Ойлер се запознава с текста, веднага оценява предимството му пред неговите собствени методи и препоръчва 23-годишния младеж за член на Берлинската академия на науките, която и оглавява по-късно в периода 1766-1787 г.

Съвместният труд на Лагранж и Ойлер "Методи за намиране на криви със свойството максимум и минимум"(1774) поставя основите на сравнително нов дял на математиката, започнат от братята Бернули - вариационното смятане.

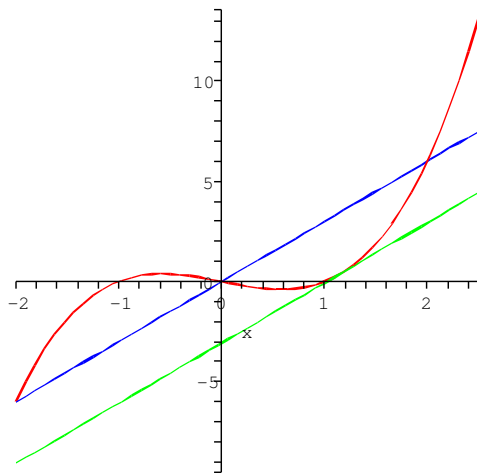
През 1787 г. Лагранж се установява в Париж. През тази година е публикуван и трудът му "Аналитична механика", в който той обобщава постиженията в анализа през изтичащото столетие и излага класическата аналитична механика.

През 1792 г. Лагранж заедно с Гаспар Монж и Пиер-Симон Лаплас са поканени за членове на Международното бюро за мерки и теглилки.



Фигура 84: Joseph Louis Lagrange

Пример 6.17 Нека разгледаме функцията $f(x) = x^3 - x$ и $a = 0$, $b = 2$. Тъй като функцията f удовлетворява условията на Теорема 6.12, то съществува $c \in (0, 2)$, така че $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$, т.е. $3 = 3c^2 - 1$ или $c = 2/\sqrt{3}$.



Фигура 85: Графика на функцията $x^3 - x$

На Фиг. 85 е показано, че допирателната в точката $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$ е успоредна на правата OA , където $O = (0, 0)$ и $A = (2, 6)$.

Пример 6.18 Нека обект се движи по права линия с функция, описваща позицията му $s = f(t)$ и $t \in [a, b]$. Средната скорост на обекта е

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теоремата за крайните нараствания на Лагранж ни казва, че съществува поне една точка, в която моментната скорост на обекта е била равна на средната скорост. (Например, ако сме изминали разстояние от 180 км за 2 часа, тогава в поне един момент от време моментната ни скорост е била 90 km/h).

Теоремата за крайните нараствания на Лагранж има и друг тип приложение: от информацията за производната можем да правим изводи за функцията.

Пример 6.19 Нека $f(0) = -3$ и $f'(x) \leq 5$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Колко най-голяма може да бъде

а) $f(0.5)$; б) $f(1)$; в) $f(2)$.

От диференцируемостта на f за всяко $x \in \mathbb{R}$ следва, че можем да приложим теоремата за средните стойности в интервала $[0, b]$, $b > 0$. Според Теорема 6.12 съществува $c \in (0, b)$, така че

$$f(b) - f(0) = f'(c)(b - 0)$$

или

$$(20) \quad f(b) = f(0) + bf'(c) \leq -3 + 5b.$$

От неравенството (20) получаваме за различните стойности на $b = 0.5; 1; 2$

а) $b = 0.5$, $f(0.5) \leq 0.5$;

б) $b = 1$, $f(1) \leq 2$. в) $b = 2$, $f(2) \leq 7$.

Пример 6.19 показва, че колкото по-малък е интервалът $[a, b]$ в Теорема 6.12, толкова по-точен извод можем да направим за стойностите на функцията.

Пример 6.20 Намерете приближена стойност на $\sqrt{2}$.

Да разгледаме функцията $f(x) = \sqrt{x} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. От Теорема 6.12 следва, че съществува $\xi \in [b, a_1]$, така че е в сила равенството

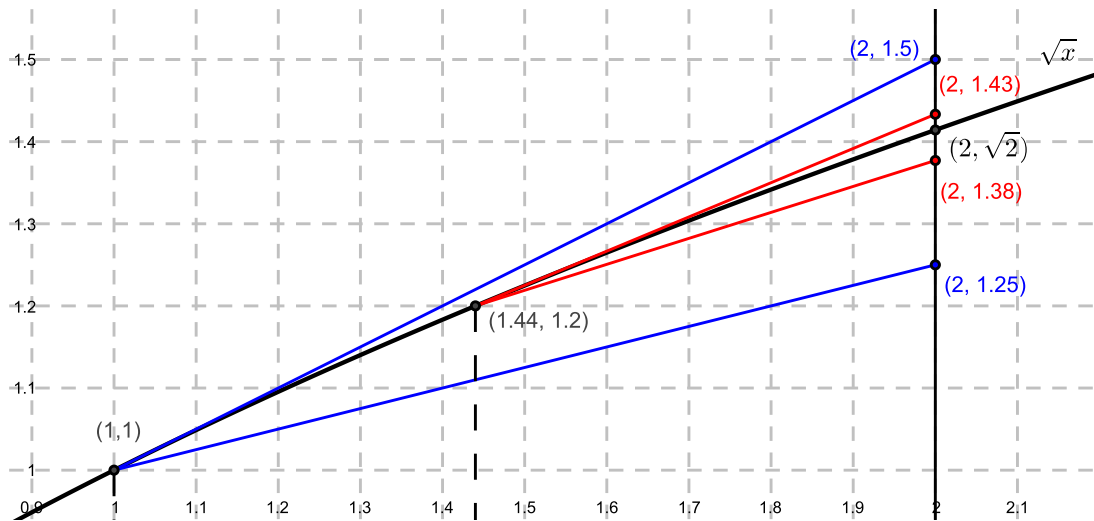
$$\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a_1}}{b - a_1} = \frac{f(b) - f(a_1)}{b - a_1} = f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}.$$

Нека да изберем $b = 2$ и $a_1 < 2 < a_2$. Тогава аналогично на Пример 6.19 и от факта, че \sqrt{x} е монотонно растяща функция получаваме неравенствата

$$\frac{2 - a_1}{2\sqrt{a_2}} + \sqrt{a_1} \leq \sqrt{2} = \frac{2 - a_1}{2\sqrt{\xi}} + \sqrt{a_1} \leq \frac{2 - a_1}{2\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_1}.$$

Избираме числата a_i , така че да можем да пресметнем точната стойност на $\sqrt{a_i}$. Ако изберем $a_1 = 1$ и $a_2 = 4$, то получаваме $1.25 \leq \sqrt{2} = 1.414213562 \leq 1.5$. Ако изберем $a_1 = 1.44$ и $a_2 = 2.25$, то получаваме $1.386 \leq \sqrt{2} = 1.414213562 \leq 1.434$. Ако изберем $a_1 = 1.69$ и $a_2 = 2.1025$, то получаваме $1.4068 \leq \sqrt{2} = 1.414213562 \leq 1.4193$. Ако изберем $a_1 = 1.9881$ и $a_2 = 2.0164$, то получаваме $1.41419 \leq \sqrt{2} = 1.414213562 \leq 1.41422$.

На Фиг. 86 е илюстрирано графично, как при намаляване на дължината на интервала $[a, b]$ стойността на $\sqrt{2}$ се заключва във все по-тесни граници. От графиката е видно, че при използване на Теорема 6.12 стойността на функцията $f(x) = \sqrt{x}$ се замества със стойност върху правите $y_1(x) = f'(a_2)x - f'(a_2)a_1 + \sqrt{a_1} = \frac{x}{2\sqrt{a_2}} - \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} + \sqrt{a_1}$ и $y_2(x) = f'(a_1)x - f'(a_1)a_1 + \sqrt{a_1} = \frac{x}{2\sqrt{a_1}} - \frac{a_1}{2\sqrt{a_1}} + \sqrt{a_1}$. На Фиг. 86 виждаме, че $\sqrt{2}$ принадлежи на отсечката с краища $[(2, 1.25), (2, 1.5)]$, когато вземем $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ и $\sqrt{2}$ принадлежи на отсечката с краища $[(2, 1.386), (2, 1.434)]$, когато вземем $a_1 = 1.44$, $a_2 = 2.25$.



Фигура 86: Приближено пресмятане на $\sqrt{2}$

Ще покажем как можем да дефинираме процедура в *Maple*, с помощта на която да пресмятаме приближено стойността на произволна растяща функция. Дефинираме процедурата *SQR*, която има за променливи левия край на интервала a , десния край на интервала b , точката c в която искаме да намерим приближената стойност на функцията и функцията f . Използваме няколко локални променливи u, v, w , които са ни нужни за присвояване на приближените стойности и локална променлива $f1$, която е производната на функцията f .

```

SQR := proc(a, b, c, f)
local u, v, w, f1;
f1 := D(f);
u := evalf(f1(b) · (c - a) + f(a));
v := evalf(sqrt(c));
w := evalf(f1(a) · (c - a) + f(a))
print(u, v, w)
endproc

```

Пресмятаме приближено $\sqrt{2}$ като използваме интервала $[1, 4]$

```

g := x → sqrt(x);
SQR(1, 4, 2, g);
1.25, 1.41, 1.5

```

Пресмятаме приближено $\sqrt{2}$ като използваме интервала $[1.44, 2.25]$

```

SQR(1.44, 2.25, 2, g);
1.387, 1.414, 1.414

```

Пресмятаме приближено $\sqrt{2}$ като използваме интервала $[1.96, 2.1025]$

```

SQR(1.96, 2.1025, 2, g);
1.4138, 1.4142, 1.4143

```

Пресмятаме приближено $\sqrt{101}$ като използваме интервала $[100, 121]$

```

SQR(100, 121, 101, g);
10.04545455, 10.04987562, 10.05000000

```

Пресмятаме приближено $\sqrt{111}$ като използваме интервала $[100, 121]$

```

SQR(100, 121, 111, g);
10.50000000, 10.53565375, 10.55000000

```

ЗАДАЧИ:

1) Докажете, че функцията f има точно един корен:

а) $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 15x - 10$; б) $f(x) = x^5 + 5x - 5$;

в) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 6$; г) $f(x) = 3e^x + x^3 - 1$;

д) $f(x) = 2x \operatorname{arctg}(x) - \ln(1 + x^2) + 4x + 2$; е) $f(x) = 3x - 2 \cos(x) - 2$.

2) Докажете, че функцията f има точно два корен:

а) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x - 1$; б) $f(x) = xe^x - 2e^x + \frac{x^2}{2} - x + 1$

в) $f(x) = x^2e^x - 2xe^x + 3e^x - \frac{x^3}{3} - x - 4$.

3) Намерете приближена стойност на:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{101}$; в) $\sqrt{1000}$; г) $\sqrt[3]{3}$; д) $\sqrt[3]{101}$; е) $\sqrt[3]{1000}$.

7 Приложение на диференцирането

Ние вече разгледахме някои приложения на производните. Когато знаем основните правила за намиране на производни и основните теореми на диференциалното смятане ще можем да разгледаме по-дълбоки приложения. Ще видим, как производната влияе на графиката на функция и ще ни помогне да изчертаваме графики на функции без помощта на *Maple*. Ще покажем, как можем по-точно да намираме приближени стойности на функция, да търсим по-сложни граници, да решаваме екстремални задачи.

7.1 Критерий за константност

Теорема 7.1 Ако функцията f е диференцируема в интервала (a, b) , то $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$ тогава и само тогава, когато f е константа в интервала (a, b) .

Доказателство: Ако $f(x) \equiv c$, то $f'(x) \equiv 0$.

Нека $f'(x) \equiv 0$ и $x_0 \in (a, b)$ е произволно избрана точка. Да изберем $[x, y] \subset (a, b)$, така че $x_0 \in (x, y)$. Функцията f удовлетворява условията на Теорема 6.12 в интервала с краища x_0 и x . Следователно съществува $\xi \in (x, x_0)$, така че $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi)$. От $f'(c) = 0$ за всяко $c \in (a, b)$ следва че $f(x) = f(x_0)$ за всяко $x \in (x, x_0)$. Аналогично се доказва, че $f(y) = f(x_0)$ за всяко $x \in (x_0, y)$. От произволния избор на точките $x, y \in (a, b)$ следва, че стойностите на функцията във всяка произволно избрана точка $x \in (a, b)$ са равни на едно и също число $f(x_0)$. \square

Следствие 7.1 Ако функцията f е непрекъсната в интервала $[a, b]$ и диференцируема в (a, b) , то $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$ тогава и само тогава, когато f е константа в интервала $[a, b]$.

Доказателство: Следствие 7.1 удовлетворява всички условия на Теорема 7.1 и следователно $f(x) \equiv c$ за всяко $x \in (a, b)$ тогава и само тогава, когато f е константа в интервала (a, b) . От непрекъснатостта на функцията в $[a, b]$ следва, че $f(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ и $f(b) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$.

Следствие 7.2 Нека $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и $f'(x) = g'(x)$ за всяко $x \in (a, b)$. Тогава съществува константа $C \in \mathbb{R}$, така че $f(x) = g(x) + C$ за всяко $x \in (a, b)$.

Теорема 7.1 и Следствие 7.2 трябва да се прилага много внимателно, както илюстрира следният пример. Да разгледаме функцията

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Дефиниционната област на f е $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ и $f'(x)$ съществува за всяко $x \in D$. Очевидно, че f не е константа, въпреки че $f'(x) \equiv 0$ във всеки от интервалите $(-\infty, 0)$ или

$(0, +\infty)$. Не е изпълнено условието за съществуване на $f'(x)$ за всяко $x \in (a, b)$, където $a < x < b$.

Пример 7.1 Докажете, че $\operatorname{arctg} x = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$.

От

$$\left(\arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

получаваме, че $(\operatorname{arctg}(x))' = \left(\arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right)'$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Тогава съгласно Следствие 7.2 $\operatorname{arctg}(x) - \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = C$. От $\operatorname{arctg}(0) - \arcsin \left(\frac{0}{\sqrt{1+0^2}} \right) = 0$ получаваме, че $C = 0$.

Ако използваме *Maple* за пресмятанията ще видим, че ще ни се наложи да направим някои преобразования на ръка.

```
f := x -> arctg(x);
g := x -> arcsin ( x / sqrt(1+x^2) );
f1 := D(f); g1 := D(g);
x -> arctg(x);
x -> arcsin ( x / sqrt(1+x^2) );
x -> 1 / (1+x^2);
x -> 1 / sqrt(1+x^2) - x^2 / (sqrt(1+x^2)^3);
x -> 1 / sqrt(1 - x^2 / (sqrt(1+x^2)^2));
simplify(g1(x));
1 / ((1+x^2)^(3/2) * sqrt(1/(1+x^2)))
```

След преобразования на ръка получаваме, че $g1(x) = f1(x)$. Ако поискаме *Maple* да реши уравнението $f1(x) = g1(x)$

```
solve(f1(x) = g1(x), x);
x
```

получаваме, че е изпълнено за всяко x .

Пример 7.2 Нека разгледаме функциите $\operatorname{arctg}(x)$ и $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

Функцията $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ е дефинирана за $x \neq \pm 1$. От

$$\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{(1+x^2)}$$

получаваме, че $\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)\right)' = (\operatorname{arctg} x)'$ за всяко $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Следователно $\operatorname{arctg}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + C$ за всеки един от интервалите $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$. Любопитното е, че за всеки един от интервалите се получава различна константа C . От $\operatorname{arctg}(0) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot 0}{1-0^2}\right) = 0$ следва

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \text{ за } x \in (-1, 1).$$

От $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg}(x) - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \pm\pi/2$ следва

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) + \pi/2 \text{ за } x \in (1, +\infty)$$

и

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - \pi/2 \text{ за } x \in (-\infty, -1).$$

На Фиг. 87 сме начертали графиката на функцията $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$, като разбира се сме използвали командата за изчертаване на функция с точки на прекъсване.

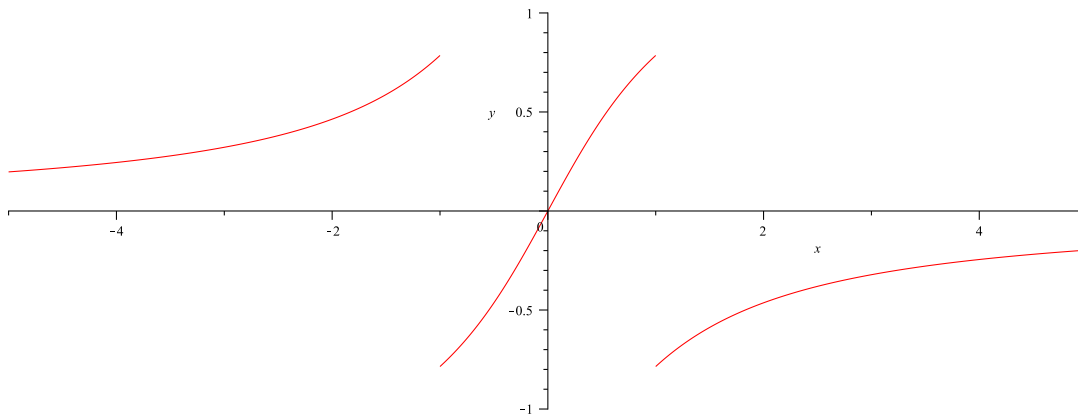
$\text{plot}\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right), x = -5.5, y = -1.1, \text{discont} = \text{true}\right);$

Ако използваме *Maple* за пресмятанията в този пример, ще видим, че *Maple* успява да преобразува производната на $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

$f := x \rightarrow \operatorname{arctg}(x);$

$g := x \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot x}{1-x^2}\right);$

$f1 := D(f); g1 := D(g);$



Фигура 87: Графика на функцията $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)$

$$x \rightarrow \operatorname{arctg}(x);$$

$$x \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot x}{1-x^2} \right);$$

$$x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$$

$$x \rightarrow \frac{\frac{1}{2} \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}$$

simplify(g1(x));

$$\frac{1}{1+x^2}$$

Следователно $g1(x) = f1(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Пример 7.3 Докажете тъждеството $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \pi/2$.

Нека разгледаме функцията $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x$. Тогава $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Следователно $f(x) \equiv C$ -константа. За да определим константата C нека пресметнем $f(1)$. Тъй като $f(1) = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 + \pi/4 = \pi/2$, то $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \pi/2$.

ЗАДАЧИ:

1) Докажете тъждествата:

$$a) \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0; \end{cases}$$

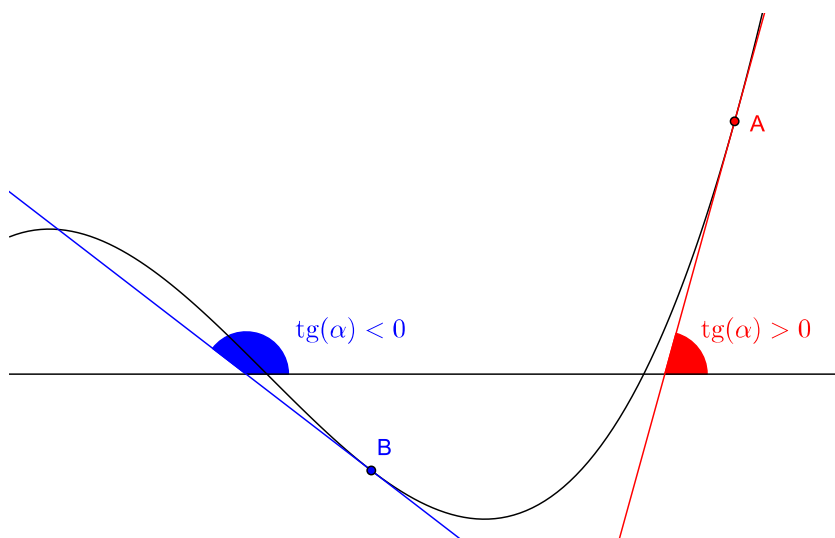
$$\text{б) } \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\text{в) } \arcsin \left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2} \right) = \frac{1}{2} \arcsin x, \quad x \in [-1, 1];$$

$$\text{г) } \arcsin \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-2x}}}{2} \right) = \frac{1}{4} \arcsin x, \quad x \in [-1, 1].$$

7.2 Критерий за монотонност

Много от приложенията на диференциалното смятане са свързани с умението ни да определяме дали функцията расте или намалява. Нека разгледаме Фиг. 88. Знаем, че във всяка точка производната на функцията определя $\operatorname{tg} \alpha$, където α е ъгълът, който сключва допирателната към графиката на функцията в тази точка с координатната ос O_x . Следователно, ако функцията расте (намалява), то $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ($\operatorname{tg} \alpha < 0$).



Фигура 88: Ъглов коефициент на допирателна към крива

Теорема 7.2 Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема за всяко $x \in (a, b)$. Тогава:

- 1) f е монотонно растяща в интервала $[a, b]$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a, b)$;
- 2) f е монотонно намаляваща в интервала $[a, b]$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in (a, b)$.

Доказателство: 1) Нека f е монотонно растяща функция в интервала $[a, b]$. Тогава за всеки $x \in (a, b)$ и $\Delta x > 0$ е изпълнено $f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$ и тогава $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$. След граничен преход при $\Delta x \rightarrow 0$ получаваме

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Обратно, нека $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a, b)$ и нека $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ са произволни. Според Теорема 6.12 съществува $c \in (x_1, x_2)$, така че е изпълнено равенството

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

От последното равенство получаваме, че $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ за всеки две $x_1 < x_2$.

Доказателството на 2) е аналогично. \square

Пример 7.4 Да разгледаме функцията $f(x) = x^3$.

Знаем, че тя е строго растяща, но производната ѝ е нула в нулата.

Този пример ни показва, че от строгата монотонност не можем да очакваме, че $f' > 0$.

Теорема 7.3 Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и е диференцируема за всяко $x \in (a, b)$. Тогава:

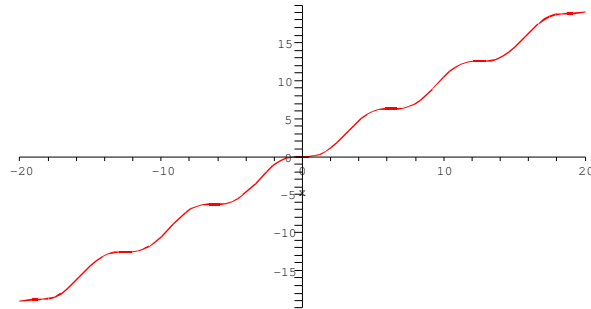
- 1) f е строго растяща в интервала $[a, b]$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a, b)$ и f' не е нула в цели интервали;
- 2) f е строго намаляваща в интервала $[a, b]$ тогава и само тогава, когато $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in (a, b)$ и f' не е нула в цели интервали.

Доказателство: 1) Ако функцията f е растяща в интервала $[a, b]$, то съгласно Теорема 7.2 $f'(x) \geq 0$. Ако допуснем, че съществува цял интервал $(x_1, x_2) \subset [a, b]$, където $f'(x) \equiv 0$, то според Теорема 7.1 получаваме, че f е константа в (x_1, x_2) , което е противоречие с условието за строгата монотонност на f .

Нека $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a, b)$ и f' не е нула в цели интервали. Съгласно Теорема 7.2 за всеки $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ е изпълнено неравенството $f(x_1) \leq f(x_2)$. Да допуснем, че съществуват две стойности x_1 и x_2 , $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, така че $f(x_1) = f(x_2)$. От монотонността на f следва, че за всяко $x \in (x_1, x_2)$ е изпълнено $f(x_1) = f(x) = f(x_2)$. Следователно f е константа в интервала (x_1, x_2) и според Теорема 7.1 f' е тъждествено равна на нула в целия интервал (x_1, x_2) . Последното противоречи с условието на Теоремата и следователно $f(x_1) < f(x_2)$ за всеки две $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

Доказателството на 2) се прави аналогично. \square

Пример 7.5 Функцията $f(x) = x - \sin x$ е строго растяща (Фиг. 89).



Фигура 89: Графика на функцията $x - \sin x$

Наистина, $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ и $f'(x) = 0$ само в точките $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Лесно следствие, което обхваща широк клас от функции е

Следствие 7.3 Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема за всяко $x \in (a, b)$. Тогава:

1) Ако $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a, b)$ и f' е нула в краен брой точки, то f е строго растяща в интервала $[a, b]$;

2) Ако $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in (a, b)$ и f' е нула в краен брой точки, то f е строго намаляваща в интервала $[a, b]$.

Пример 7.6 Функцията $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ строго растяща в интервала $(0, +\infty)$.

Нека положим $g(x) = \ln(f(x)) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)^x = x(\ln(x+1) - \ln x)$. Ако докажем, че g е строго растяща, то и f ще е строго растяща, защото $f(x) = e^{g(x)}$ е съставна функция на две строго растящи функции. След диференциране на g и прилагане на Теоремата за крайните нараствания за разликата $\ln(x+1) - \ln x$ получаваме, че равенството

$$g'(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{\xi} - \frac{1}{x+1}$$

е изпълнено за някое $\xi \in (x, x+1)$. От $\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x+1} > 0$ следва верността на неравенството $g'(x) > 0$ за всяко $x \in (0, +\infty)$ и според Следствие 7.3 g е строго растяща.

Пример 7.7 Намерете интервалите на растене и намаляване на функцията $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

Намираме $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1)$.

Определяме знаците на f' от таблицата:

интервал	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$(-\infty, -1)$	—	—	—	—	намалява
$(-1, 0)$	—	—	+	+	расте
$(0, 2)$	+	—	+	—	намалява
$(2, +\infty)$	+	+	+	+	расте

Дефинираме функцията f , намираме f' и решаваме неравенствата $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$. Решенията на неравенствата записваме в променливите p и q и преброяваме елементите им с командата `numelems(p)`.

$f := x \rightarrow 3 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 5;$

$f1 := D(f);$

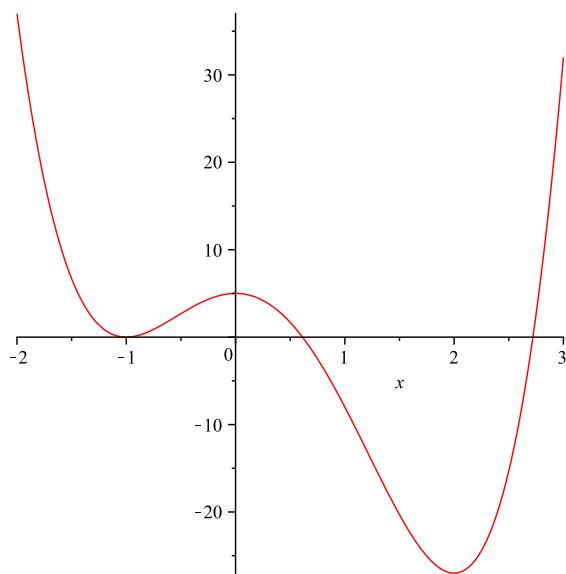
$p := \text{solve}(f1(x) > 0, x); sp := \text{numelems}(p);$

$q := \text{solve}(f1(x) < 0, x); sq := \text{numelems}(q);$

```

 $x \rightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ 
 $x \rightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x$ 
 $((x < 0, -1 < x), (2 < x))$ 
2
 $((x < -1), (x < 2, 0 < x))$ 
2
for i from 1 to sp do
print(p[i], „Функцията е растяща“);
end do
 $(x < 0, -1 < x)$ , „Функцията е растяща“);
 $(2 < x)$ , „Функцията е растяща“);
for i from 1 to sq do
print(p[i], „Функцията е намаляваща“);
end do
 $(x < -1)$ , „Функцията е намаляваща“);
 $(x < 2, 0 < x)$ , „Функцията е намаляваща“);

```



Фигура 90: Графика на функцията $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

Maple дава възможност да се решават бързо задачи, в които се изискват множество ръчни пресмятания и преобразования. Ще илюстрираме това със следващия пример.

Пример 7.8 Намерете интервалите на растене и на намаляване на функцията

$$f(x) = \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{4} - \frac{19x^{11}}{11} - \frac{28x^{10}}{5} + \frac{95x^9}{9} + \frac{347x^8}{8} - \frac{17x^7}{7} - \frac{347x^6}{3} - \frac{516x^5}{5} + 10x^4 + 32x^3.$$

```

f := x → f(x)
      =  $\frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{4} - \frac{19x^{11}}{11} - \frac{28x^{10}}{5} + \frac{95x^9}{9} + \frac{347x^8}{8} - \frac{17x^7}{7} - \frac{347x^6}{3} - \frac{516x^5}{5} + 10x^4 + 32x^3$ ;
f1 := D(f);
p := solve(f1(x) > 0, x); sp := numelems(p);
q := solve(f1(x) < 0, x); sq := numelems(q);
x →  $\frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{4} - \frac{19x^{11}}{11} - \frac{28x^{10}}{5} + \frac{95x^9}{9} + \frac{347x^8}{8} - \frac{17x^7}{7} - \frac{347x^6}{3} - \frac{516x^5}{5} + 10x^4 + 32x^3$ 
x →  $x^{12} + 3x^{11} - 19x^{10} - 56x^9 + 95x^8 + 347x^7 - 17x^6 - 694x^5 - 516x^4 + 40x^3 + 96x^2$ 
 $\left( (x < -4), (x < 0, -1 < x), \left( x < \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0 < x \right), \left( x < \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}, 2 < x \right), (3 < x) \right)$ 
5
 $\left( (x < -2, -4 < x), (x < -1, -2 < x), \left( x < 2, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < x \right), \left( x < 3, \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} < x \right) \right)$ 
4
for i from 1 to sp do
  print(p[i], „Функцията е растяща“);
end do
(x < -4), „Функцията е растяща“);
(x < 0, -1 < x), „Функцията е растяща“);
 $\left( x < \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 0 < x \right)$ , „Функцията е растяща“);
 $\left( x < \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}, 2 < x \right)$ , „Функцията е растяща“);
(3 < x), „Функцията е растяща“);
for i from 1 to sq do
  print(p[i], „Функцията е намаляваща“);
end do
(x < -2, -4 < x), „Функцията е намаляваща“);
(x < -1, -2 < x), „Функцията е намаляваща“);
 $\left( x < 2, \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < x \right)$ , „Функцията е намаляваща“);
 $\left( x < 3, \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2} < x \right)$ , „Функцията е намаляваща“);

```


ЗАДАЧИ:

1) Намерете интервалите на растене и на намаляване на функцията f

а) $f(x) = x^2 - x^4$; б) $f(x) = x(x+1)^2(x-1)^3$;

в) $f(x) = (x-x^2)^3$; г) $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$;

д) $f(x) = x - \sqrt[3]{x}$; е) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$;

ж) $f(x) = x^2 e^x$; з) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

2) Намерете интервалите на растене и на намаляване на функцията f

а) $f(x) = \sin x + \cos x$; б) $f(x) = \sin x \cos x$; в) $f(x) = \sin^2 x + \sin x + 1$.

7.3 Доказване на неравенства

Критерият за монотонност може да се прилага и за доказване на неравенства. Ще използваме следния факт, който е непосредствено следствие от Теорема 6.12.

Следствие 7.4 Нека функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b) :

1) Ако $f(a) \geq c$ и $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a, b]$, то $f(x) \geq c$ за всяко $x \geq a$;

2) Ако $f(a) \leq c$ и $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in [a, b]$, то $f(x) \leq c$ за всяко $x \geq a$;

3) Ако $f(b) \geq c$ и $f'(x) \leq 0$ за всяко $x \in [a, b]$, то $f(x) \geq c$ за всяко $x \geq a$;

4) Ако $f(b) \leq c$ и $f'(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a, b]$, то $f(x) \leq c$ за всяко $x \geq a$.

Доказателство: 1) За всяко $x \in [a, b]$ са в сила условията на Теорема 6.12 и съществува $\xi \in [a, x]$, така че

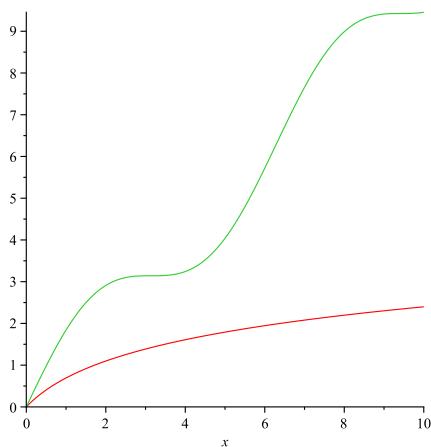
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \geq 0.$$

Следователно $f(x) \geq f(a) \geq c$.

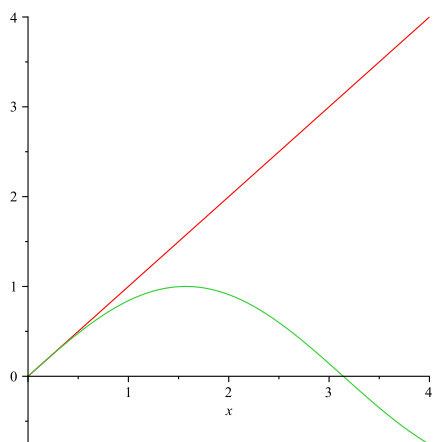
Доказателствата на 2), 3) и 4) са аналогични. \square

На Фиг. 91 са изчертани графиките на функциите $\ln(x+1)$ и $x + \sin x$ в интервала $[0, 10]$. Лесно се съобразява, че производните им са неотрицателни. Графиките показват, че ако производните са неотрицателни функции, то започвайки от $f(0) = 0$ функционалните стойности постоянно ще нарастват.

Пример 7.9 Докажете, че за всяко $x \in (0, +\infty)$ е в сила неравенството $\sin x < x$.



Фигура 91: Графики на функциите $\ln(x+1)$ и $x + \sin x$



Фигура 92: Графики на функциите x и $\sin x$

Да разгледаме функцията $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ в интервала $(0, +\infty)$. От Пример 7.9 знаем, че неравенството

$$f'(x) = -\sin x + x > 0$$

е изпълнено за всяко $x \in (0, +\infty)$. Следователно f е строго растяща функция. Така получаваме, че за всяко $x > 0$ е изпълнено $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = f(x) > f(0) = 0$.

Пример 7.11 Докажете, че за всяко $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ е в сила неравенството $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$.

Нека разгледаме функцията $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}$ в интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. От

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 - x^2 = \operatorname{tg}^2(x) - x^2 = (\operatorname{tg} x + x)(\operatorname{tg} x - x)$$

и неравенството $\operatorname{tg} x + x > 0$ за всяко $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ получаваме, че знака на f' се определя от знакът на $\operatorname{tg} x - x$.

Нека положим $g(x) = \operatorname{tg} x - x$. От $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = \operatorname{tg}^2(x)$ получава-

ме, че $g'(x) > 0$ за всяко $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Фигура 93: Графики на функциите $\cos x$ и $1 - \frac{x^2}{2}$

Следователно g е строго растяща функция и $g(x) > g(0) = 0$ за всяко $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

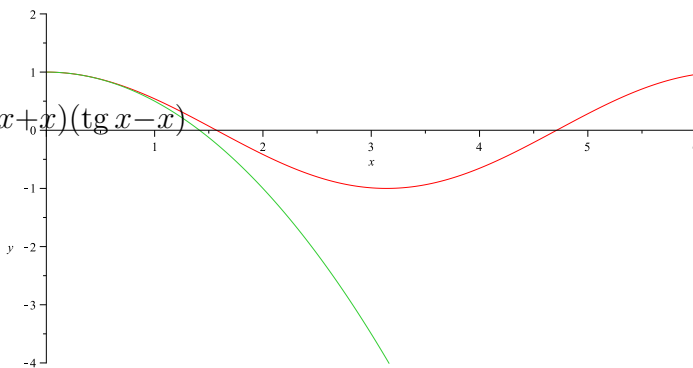
Връщаме се към функцията f . Получихме $f'(x) = (\operatorname{tg} x + x)g(x) > 0$ за всяко $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Следователно f е строго растяща и $f(x) > f(0) = 0$, т.е. $\operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3} > 0$.

Нека разгледаме функцията $f(x) = x - \sin x$ в интервала $[0, +\infty)$. Трябва да покажем, че $f(x) > 0$ за всяко $x \in (0, +\infty)$. Тъй като $f(0) = 0$, то ако покажем, че f е строго растяща ще следва $f(x) > 0$ за всяко $x \in (0, +\infty)$. От

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0,$$

като равенство се получава само в изолирани точки и съгласно Теорема 7.3 следва, че f е строго растяща. Следователно за всяко $x > 0$ е изпълнено $x - \sin x = f(x) > f(0) = 0$ (Фиг. 92).

Пример 7.10 Докажете, че за всяко $x \in (0, +\infty)$ е в сила неравенството $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.



Пример 7.12 Нека $\alpha \in (0, 1)$. Докажете, че неравенството

$$(21) \quad x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$$

е изпълнено за всяко $x \in [0, +\infty)$.

Да разгледаме функцията $f(x) = x^\alpha - \alpha x$. След диференциране получаваме $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$. От $\alpha \in (0, 1)$ следва, че $f'(x) > 0$ за $x \in (0, 1)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (1, +\infty)$. Следователно f е растяща в интервала $(0, 1)$ и е намаляваща в интервала $(1, +\infty)$. От тук получаваме, че за всяко $x \neq 1$ е изпълнено неравенството $x^\alpha - \alpha x = f(x) < f(1) = 1 - \alpha$.

Лема 7.1 (Неравенство на Юнг) Нека $p, q \in (1, +\infty)$ са такива че $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. За всеки $u, v > 0$ е изпълнено неравенството

$$(22) \quad uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Неравенството на Юнг може да бъде доказано по различни начини. Ние ще използваме Задача 7.12.

Доказателство: Да положим $x = \frac{a}{b}$ и $\beta = 1 - \alpha$, където $a, b > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$. След заместване в (21) получаваме

$$\frac{a^\alpha}{b^\alpha} \leq \alpha \frac{a}{b} + \beta$$

и след преобразуване намираме

$$(23) \quad a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

Нека положим $p = \frac{1}{\alpha}$, $q = \frac{1}{\beta}$, $u = a^\alpha$ и $v = b^\beta$. Тогава след заместване в (23) получаваме неравенство (22). \square

Следствие 7.5 Нека $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ са такива че $\alpha + \beta + \gamma = 1$. За всеки $u, v, t > 0$ е изпълнено неравенството

$$(24) \quad u^\alpha v^\beta t^\gamma \leq \alpha u + \beta v + \gamma t$$

Доказателство: От (23) получаваме неравенствата

$$\begin{aligned} u^\alpha v^\beta t^\gamma &= u^\alpha \left(v^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} t^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \right)^{\beta+\gamma} \leq \alpha u + (\beta + \gamma) v^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}} t^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}} \\ &\leq \alpha u + (\beta + \gamma) \left(\frac{\beta}{\beta + \gamma} v + \frac{\gamma}{\beta + \gamma} t \right) = \alpha u + \beta v + \gamma t. \end{aligned}$$

\square

Следствие 7.6 Нека $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ са такива че $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. За всеки $u_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ е изпълнено неравенството

$$(25) \quad u_1^{p_1} \cdot u_2^{p_2} \dots u_n^{p_n} \leq \sum_{i=1}^n p_i u_i$$

Доказателство: Доказателството е аналогично на доказателството на Следствие 7.5. \square

Следствие 7.7 (неравенство между средно аритметично и средно геометрично) Нека $n \in \mathbb{N}$. За всеки $u_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ е изпълнено неравенството

$$(26) \quad \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{n}$$

Доказателство: Полагаме $p_i = \frac{1}{n}$ в (7.6). \square

ЗАДАЧИ:

1) Докажете неравенствата:

а) $e^x \geq 1 + x$, $x \in (-\infty, +\infty)$; б) $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, +\infty)$;

в) $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$, $x \in [1, +\infty)$, $\alpha > 1$; г) $1 + \alpha \ln x \leq x^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$, $\alpha > 0$;

д) $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) < x$, $x \in (0, +\infty)$; е) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $x \in (0, +\infty)$;

ж) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, $x \in (0, +\infty)$.

2) Докажете неравенствата:

а) $\frac{\ln^2 x}{2} \leq \frac{x-1}{e}$, $x \in [1, +\infty)$; б) $1 - \frac{1+x}{e^x} \leq \frac{x}{e}$, $x \in [0, +\infty)$;

в) $\arcsin x \leq \frac{x+x^3}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in [0, 1)$; г) $\operatorname{arctg} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$, $x \in (0, 1)$;

д) $\sin(\pi x) \geq \pi(x-x^2)$, $x \in (0, +\infty)$; е) $\cos(\pi x) \geq \frac{\pi}{4} - \pi x^2$, $x \in (0, +\infty)$.

7.4 Правило на Лопитал

Ще казваме, че отношението на две функции f и g е неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ при $x \rightarrow a$, ако $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$.

Ще разгледаме приложение на производните за разкриване на неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Правилата за разкриване на тези неопределености са открити от Лопитал и Бернули, но са известни с общото име правило на Лопитал.

Теорема 7.4 (обобщена теорема за крайните нараствания на Коши) Ако функциите f и g са непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$, диференцируеми в интервала (a, b) и $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a, b)$, то съществува $\xi \in (a, b)$, така че

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказателство: Първо ще докажем, че $g(a) \neq g(b)$. Наистина, ако допуснем, че това не е така, то според Теоремата на Рол съществува $\xi \in (a, b)$, така че $g'(\xi) = 0$, което противоречи с условието на теоремата.

Нека дефинираме функцията

$$(27) \quad F(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

която е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и диференцируема в интервала (a, b) . Очевидно $F(a) = F(b)$ и съгласно Теоремата на Рол съществува $\xi \in (a, b)$, така че $F'(\xi) = 0$. След диференциране в (27) получаваме:

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

и

$$F'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0$$

или

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Определение 7.1 Нека $a \in \mathbb{R}$. Прободена околност на точката a наричаме множеството $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$, за произволно $\delta > 0$.

Теорема 7.5 (на Лопитал) Нека функциите f и g са дефинирани и диференцируеми в прободена околност на точката a , $g'(x) \neq 0$ в тази околност и

$$(28) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Тогава, ако съществува границата $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и границата $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и двете граници са равни.

Доказателство: Нека означим с Δ прободената околност на точката a , в която f и g удовлетворяват условията на Теоремата. Нека додефинираме функциите f и g в точката a , като положим $f(a) = g(a) = 0$. Функциите f и g стават непрекъснати в Δ при това додефиниране.

Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е произволна редица, клоняща към a и $x_n \neq a$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

За всеки затворен интервал $[x_n, a]$ или $[a, x_n]$ са изпълнени условията от Теоремата на Коши и следователно съществува ξ_n в отворения интервал с краища точките x_n и a , така че

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

От $f(a) = g(a) = 0$ получаваме

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

При $n \rightarrow \infty$ по дефиниция е изпълнено $x_n \rightarrow a$ и от избора на ξ_n между точките x_n и a следва, че $\xi_n \rightarrow a$. От съществуването на границата $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ и определението на Хайне следва, че за всяка редица $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ границата $\lim_{z_n \rightarrow a} \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)}$ е една и съща. Така за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ получаваме

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$

и според определението за граница по Хайне следва верността на теоремата. \square

Пример 7.13 Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

От $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$ и Теорема 7.5 получаваме $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$.

Пример 7.14 Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

От $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right]$ получаваме отново неопределеност, за която са в сила условията на Теорема 7.5. От

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

получаваме $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ и следователно $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$.

Нека отбележим, че Теорема 7.5 е само достатъчно условие. Например границата $\frac{\left(x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{(\sin x)'}$ при $x \rightarrow 0$ не съществува, докато лесно се пресмята, че

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

защото $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ и $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ е ограничена функция.

Ще демонстрираме как можем да използваме *Maple* за извършване на пресмятанията, свързани с приложението на правилото на Лопитал.

Първо ще дефинираме процедура, която да проверява, дали отношението $\frac{f1(x)}{f2(x)}$ е неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или е определен израз.

```

ULZ := proc(a, f1, f2)
local u;
if limit(f1(x), x = a) = 0 and limit(f2(x), x = a) = 0 then true
else false
end if
end proc;

```

Ще илюстрираме действието на процедурата *ULZ*.

```

f := x → exp(x) + exp(-x) - 2 · cos(x); g := x → x2;
x → exp(x) + exp(-x) - 2 · cos(x)
g := x → x2
ULZ(0, f, g); ULZ(1, f, g);
true
false

```

Дефинираме процедура, която използва *ULZ* и ако отношението $\frac{f1(x)}{f2(x)}$ е неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, тогава проверяваме дали и отношението $\frac{f1'(x)}{f2'(x)}$ е неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, докато се стигне до отношение, което е определено. Използваме итерация като предполагаме, че за задачите, които ще решаваме ще са ни достатъчни до 10 прилагания на правилото на Лопитал. По-нататък ще дефинираме тази процедура рекурсивно и няма да налагаме ограничение на броя итерации.

```

LTI := proc(a, f1, f2)
local i, h1, h2, p;
for i from 0 to 10 do h1 := D(i)(f1); h2 := D(i)(f2);
print(i, h1(x), h2(x));
if not(ULZ(a, D(i)(f1), D(i)(f2)))
then h1 := D(i)(f1); h2 := D(i)(f2); p := i; print(h1(x), h2(x));
break end if end do;
limit(h1(x)/h2(x), x = a)
end proc

```

Пресмятаме процедурата LTI за $a = 0$, $f = e^x + e^{-x} - 2 \cdot \cos(x)$ и $g = x^2$

$LTI(0, f, g);$

Извеждат се броя диференцирания, производните на числителя и знаменателя и границата.

$$0, \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{x^2}$$

$$1, \frac{e^x - e^{-x} + 2 \sin(x)}{2x}$$

$$2, \frac{e^x + e^{-x} + 2 \cos(x)}{2}$$

2

Пресмятаме процедурата LTI за $a = 1$, $f = e^x + e^{-x} - 2 \cdot \cos(x)$ и $g = x^2$

$LT(1, f, g);$

Проверката показва, че вече няма неопределеност и пресмята директно границата.

$$0, \frac{e^x + e^{-x} - 2 \cos(x)}{x^2}$$

$$e + e^{-1} - 2 \cos(1)$$

Ще пресметнем още една граница $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$.

$f := x \rightarrow \sin(x) - \operatorname{tg}(x); g := x \rightarrow x^3;$

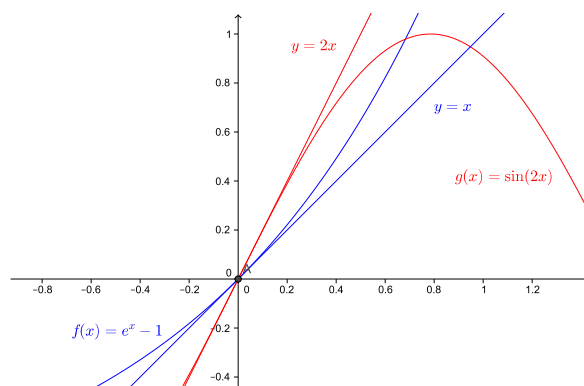
$$x \rightarrow \sin(x) - \operatorname{tg}(x)$$

$$x \rightarrow x^3$$

$LT(0, f, g);$

$$\begin{aligned}
& 0, \frac{\sin(x) - \operatorname{tg}(x)}{x^3} \\
& 1, \frac{\cos(x) - 1 - \operatorname{tg}^2(x)}{3x^2} \\
& 2, \frac{-\sin(x) - 2\operatorname{tg}(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x))}{6x} \\
& 3, -\frac{\cos(x)}{6} - \frac{(1 + \operatorname{tg}^2(x))^2}{3} - \frac{2\operatorname{tg}^2(x)(1 + \operatorname{tg}^2(x))}{3} \\
& -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ще дадем геометрична интерпретация на Теорема 7.6. Условието $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ и диференцируемостта на f и g означават, че $f(a) = g(a) = 0$. Производните $f'(a)$ и $g'(a)$ са ъгловите коефициенти на допирателните към функциите f и g в точката a . Ако поне един от тези ъглови коефициенти е различен от нула, тогава тяхното отношение е търсената граница. Например $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$. Допирателната в точката 0 към функцията $e^x - 1$ има ъглов коефициент 1, а допирателната в точката 0 към функцията $\sin(2x)$ има ъглов коефициент 2 (Фиг. 94). Ако и двата ъглови коефициента са нула, тогава и двете допирателни са успоредни на координатната ос O_x . В този случай се налага да търсим производните на производните на числителите и знаменателите. Например $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right]$. Допирателната в точката 0 към функцията $e^x - 1 - x$ има ъглов коефициент 0 и допирателната в точката 0 към функцията $1 - \cos x$ има ъглов коефициент 0 (Фиг. 95). Разглеждаме частното от производните на функциите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$. В този случай разглеждаме производните на производните на функциите и получаваме, че границата е 0.



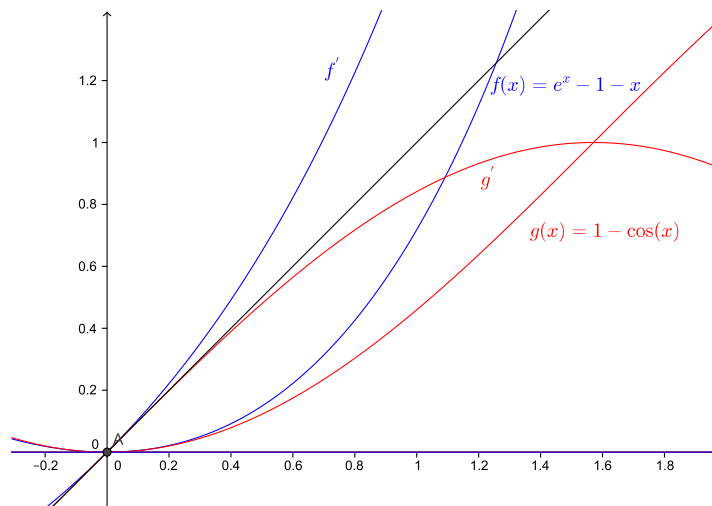
Фигура 94: Графики на функциите $e^x - 1$ и $\sin(2x)$

на координатната ос O_x . В този случай се налага да търсим производните на производните на числителите и знаменателите. Например $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right]$. Допирателната в точката 0 към функцията $e^x - 1 - x$ има ъглов коефициент 0 и допирателната в точката 0 към функцията $1 - \cos x$ има ъглов коефициент 0 (Фиг. 95). Разглеждаме частното от производните на функциите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$. В този случай разглеждаме производните на производните на функциите и получаваме, че границата е 0.

Теорема 7.6 (на Лопитал) Нека функциите f и g са дефинирани и диференцируеми в $\mathbb{R} \setminus [-M, M]$ за някое $M > 0$, като $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Тогава, ако съществува границата $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и границата $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ и двете граници са равни.



Фигура 95: Графики на функциите $e^x - 1 - x$ и $1 - \cos x$

Доказателство: Нека положим: $x = 1/t$, $G(t) = g(1/t)$ и $F(t) = f(1/t)$. Тогава функциите F и G са дефинирани в прободената околност $(-1/M, 1/M)$ на 0 и $G'(x) = -\frac{g'(1/t)}{t^2} \neq 0$ в $(-1/M, 1/M) \setminus \{0\}$. От съществуването на границата $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ следва съществуването на границата

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{f'(1/t)}{t^2}}{-\frac{g'(1/t)}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Сега прилагайки Теорема 7.5 получаваме

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

□

Пример 7.15 Намерете границата $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Веднага се вижда, че $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. След диференциране на числителя и знаменателя получаваме

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)'}{\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2x^2 - 2x + 1}}{\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x + 1} \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Теорема 7.5 е в сила и когато се разглеждат лява или дясна граница в точката a и Теорема 7.6 е в сила и когато се разглеждат граници при $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$. Същото важи за следващите Теорема 7.7 и Теорема 7.8.

Преминаваме към правилата за разкриване на неопределености от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Теорема 7.7 (на Лопитал) Нека функциите f и g са дефинирани и диференцируеми в прободена околност на точката a , $g'(x) \neq 0$ в тази околност и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

Тогава, ако съществува границата $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и границата $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ и двете граници са равни.

Доказателство: 1) Първо разглеждаме случая, когато $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$, където $b \in \mathbb{R}$. Нека $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица, клоняща към a или отляво, или отдясно. Функциите f и g удовлетворяват условията на Теорема 7.4 във всеки интервал с краища x_n и x_m . Следователно за всеки две x_n, x_m съществува $\xi_{n,m}$, така че

$$(29) \quad \frac{f'(\xi_{n,m})}{g'(\xi_{n,m})} = \frac{f(x_n) - f(x_m)}{g(x_n) - g(x_m)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}}.$$

От $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$ следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, така че за всяко $x \in (a - \delta, a + \delta)$ е валидно неравенството $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - b \right| < \varepsilon$. Следователно съществува $N \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n, m \geq N$ е в сила представянето $\frac{f'(\xi_{n,m})}{g'(\xi_{n,m})} = b + \alpha_{n,m}$, където $|\alpha_{n,m}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Нека m е фиксирано

и да направим граничен преход при $n \rightarrow \infty$ в $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}} = 1$. Следователно за всяко

$\varepsilon > 0$ при така фиксираното m съществува $N_1 \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n > N_1$ е в сила представянето

$$\frac{1 - \frac{f(x_m)}{f(x_n)}}{1 - \frac{g(x_m)}{g(x_n)}} = 1 + \beta_{n,m},$$

където $|\beta_{n,m}| < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|b| + \frac{\varepsilon}{2}}$. След заместване в (29) получаваме равенството

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = (b + \alpha_{n,m})(1 + \beta_{n,m}) = b + (b + \alpha_{n,m})\beta_{n,m} + \alpha_{n,m}.$$

От последното равенство следват неравенствата

$$\left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} - b \right| \leq (|b| + |\alpha_{n,m}|) |\beta_{n,m}| + |\alpha_{n,m}| < \left(|b| + \frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{|b| + \frac{\varepsilon}{2}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $N_1 \in \mathbb{N}$, така че за всяко $n \geq N_1$ е изпълнено неравенството $\left| \frac{f(x_n)}{g(x_n)} - b \right| \leq \varepsilon$.

2) Нека сега да разгледаме случая $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$. От $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$ и доказаното в 1) следва, че $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. Следователно $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. \square

Пример 7.16 Намерете $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

$$\text{От } \lim_{x \rightarrow 0+0} \ln x = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x\sqrt{x}}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0+0} \sqrt{x} = 0$$

получаваме, че $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$.

Теорема 7.8 (на Лопитал) Нека функциите f и g са дефинирани и диференцируеми в $\mathbb{R} \setminus [-M, M]$ за някое $M > 0$, като $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$ и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

Тогава, ако съществува границата $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то съществува и границата $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ и двете граници са равни.

Доказателство: Доказателството е аналогично на това на Теорема 7.6. \square

Ще илюстрираме, как в *Maple* можем да визуализираме използването на правилото на Лопитал във всички разгледани случаи. Първо ще дефинираме процедури, които да проверяват неопределености от двата вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

С процедурата *ULZ* проверяваме, дали има неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. С процедурата *ULI* проверяваме, дали има неопределеност от вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

```
ULZ := proc(a, f1, f2)
```

```
local u;
```

```
if limit(f1(x), x = a) = 0 and limit(f2(x), x = a) = 0
```

```
then true
```

```
else false
```

```
end if
```

```
end proc;
```

```
ULI := proc(a, f1, f2)
```

```
local u;
```

```
if limit(f1(x), x = a) = infinity and limit(f2(x), x = a) = infinity
```

```
then true
```

```
else false
```

```
end if
```

```
end proc;
```

Дефинираме процедура *LTI(a, f, g)*, която чрез итерации проверява колко пъти трябва да се приложи правилото на Лопитал

```
LTI := proc(a, f1, f2)
```

```
local i, h1, h2, p;
```

```
for i from 0 to 100 do
```

```
h1 := D(i)(f1); h2 := D(i)(f2); print  $\left(i, \frac{h1(x)}{h2(x)}\right);$ 
```

```
if (not(ULI(a, D(i)(f1), D(i)(f2))) and (not(ULZ(a, D(i)(f1), D(i)(f2))))
```

```
then h1 := D(i)(f1); h2 := D(i)(f2); p := i;
```

```
break end if end do;
```

```
limit(h1(x)/h2(x), x = a)
```

```
end proc
```

Дефинираме процедура $LTR(a, f, g)$, която рекурсивно проверява колко пъти трябва да се приложи правилото на Лопитал

```
LTR := proc(a, f1, f2, i)
local h1, h2;
print  $\left(i, \frac{f1(x)}{f2(x)}\right);$ 
if ( $ULZ(a, f1, f2)$  or  $ULI(a, f, g)$ )
then thisproc( $a, D^{(1)}(f1), D^{(1)}(f2), i + 1$ ) :
else limit  $\left(\frac{f1(x)}{f2(x)}, x = a\right)$ 
end if

end proc
```

Пресмятанията показват, че рекурсивно зададената процедура извършва пресмятанията много по-бързо. Например, нека да потърсим границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^{80} \frac{x^k}{k!}}{\sin x - \sum_{k=1}^{40} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}}.$$

Резултатите показват, че LTR пресмята границата за около 2 секунди, а LTI пресмята границата над 60 секунди.

Командата $time()$ дава моментното време в компютъра. С командите

```
st := time(); LTR(0, f, g, 0); time() - st;
```

15.671

$$0, \frac{\left(-x + \sin(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \dots\right)}{\left(e^x - 1 - \frac{1}{2}x^2 - \dots\right)}$$

.....

$$79, \frac{1 - \cos(x)}{e^x - 1 - x}$$

$$80, \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

$$81, \frac{\cos(x)}{e^x}$$

1

2.329

пресмятаме границата и времето, което е било нужно да се извършат всичките пресмятания. Времето необходимо за прилагане на правилото на Лопитал 81 пъти е 2.329 секунди. Ще отбележим, че времето за пресмятане е свързано не само с вида компютър, но и с моментното натоварване на операционната система и при всяко пресмятане на един и същи компютър ще дава различен резултат, разбира се близък до 2 секунди.

Да извършим същото пресмятане, но с итеративната процедура LTI.

st := time(); LTI(0, f, g, 0); time() - st;

18.000

$$0, \frac{\left(-x + \sin(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \dots\right)}{\left(e^x - 1 - \frac{1}{2}x^2 - \dots\right)}$$

$$79, \frac{1 - \cos(x)}{e^x - 1 - x}$$

$$80, \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$$

$$81, \frac{\cos(x)}{e^x}$$

 1
 68.984.

Освен разгледаните до момента неопределености $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, често се срещат и неопределености от видовете $[0.\infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$. Тези неопределености се свеждат до изучените две с помощта на преобразования.

Нека $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ е равно на 1, 0 или ∞ и съответно $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ е равно на ∞ или 0. Използваме представянето $f^g = e^{g \ln f}$. Ако намерим границата $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x)) = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} f^g = e^b$.

Нека отбележим, че и в трите случая получената граница $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))$ е от вида $[0.\infty]$. За намирането на граници от този вид $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)\psi(x)$, където $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$ разглеждаме $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{1/\psi(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ или $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1/\varphi(x)}{\psi(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 7.17 Намерете $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$

Търсим границата $\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = [0.\infty]$. За целта разглеждаме

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

След диференциране на числителя и знаменателя, получаваме

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} (-x) = 0.$$

От Теорема 7.7 следва $\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = 0$. Поради непрекъснатостта на показателната функция получаваме

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x} = e^0.$$

ЗАДАЧИ:

1) Намерете границите:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cot x - 1}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x - \frac{x^2}{2}}}{x^3}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$;
 д) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$;
 ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x) - 2 \arcsin x}{x^3}.$

2) Намерете границите:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{x^x} - 1)$; б) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\alpha}{x^{1 + \ln x}}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow 1-} (\ln x \ln(1 - x))$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$;
 д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} - \frac{1}{\ln(1 + x)} \right)$;

7.5 Производни от по-висок ред

В предишния параграф се сблъскахме с необходимостта да разглеждаме производната f' на функция f като функция, която има производна и да я диференцираме. Резултатът от това повторно диференциране наричаме втора производна.

Ако функцията f е диференцируема в околност на точката $(c - \delta, c + \delta)$, тогава нейната производна f' също е функция на x в тази околност. Нека $s(t)$ е изминатият път от даден

обект за време t . Скоростта на обекта в момента t е $v(t) = s'(t)$. Ускорението на обекта в момента t е производната на скоростта $v'(t)$ или втората производна на изминатия път $s''(t)$.

Аналогично се дефинира трета производна, ако съществува втората производна в цяла околност на дадена точка.

Определение 7.2 Производната на f' на функцията f в точката x_0 наричаме втора производна на f и бележим с $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.

Определение 7.3 Нека съществува $n-1$ -та производна $f^{(n-1)}$ на f в околност на точката x_0 . Тогава n -та производна на f в точката x_0 наричаме производната на $f^{(n-1)}$ в точката x_0 и бележим с $f^{(n)}(x_0)$.

Пример 7.18 $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Пример 7.19 $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$.

Пример 7.20 $(x^a)^{(n)} = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n}$.

Нека да отбележим, че ако $a \in \mathbb{N}$ то $(x^a)^{(a)} = a!$ и $(x^a)^{(n)} = 0$ за всяко $n > a$.

Пример 7.21 $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

Пример 7.22 $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Пример 7.23 $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Доказателството на всичките примери се извършва по индукция.

Пример 7.24 Докажете, че

$$(30) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)!! (\pm 1)^n}{2^n (1 \pm x)^n \sqrt{1 \pm x}},$$

където $(2n-1)!! = \prod_{k=1}^n (2k-1)$.

Нека $n = 1$. Непосредствена проверка показва, че формула (30) е вярна.

Нека формула (30) е вярна за $n = p$

$$(31) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}}\right)^{(p)} = \frac{(-1)^p (2p-1)!! (\pm 1)^p}{2^p (1 \pm x)^p \sqrt{1 \pm x}}.$$

Диференцираме (31), за да покажем, че формула (30) е вярна за $n = p + 1$.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}}\right)^{(p+1)} = \left(\frac{(-1)^p (2p-1)!! (\pm 1)^p}{2^p (1 \pm x)^{p+\frac{1}{2}}}\right)' = \left(\frac{(-1)^{p+1} (2p+1)!! (\pm 1)^{p+1}}{2^{p+1} (1 \pm x)^{p+1+\frac{1}{2}}}\right).$$

Ще дадем един не толкова тривиален пример.

Пример 7.25 Докажете, че

$$(32) \quad (\arctg x)^{(n)} = (n-1)! (1+x^2)^{-\frac{n}{2}} \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} + \arctg x\right)\right).$$

От свойствата на тригонометричните функции и обратните тригонометрични функции е известно: ако $y = \arctg x$, то $x = \tg y$, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tg^2 y} = \cos^2 y$. Тогава формула (32) може да се запиши във вида

$$(33) \quad y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right).$$

Ще докажем (33) по индукция.

Нека $n = 1$.

$$y' = (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y = \cos y \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right).$$

Нека допуснем, че формула (33) е вярна за $n = p$, т.е.

$$(34) \quad y^{(p)} = (p-1)! \cos^p y \sin\left(p\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right).$$

Нека сега $n = p + 1$. Ще докажем, че

$$y^{(p+1)}(x) = p! \cos^{p+1} y \left(\sin\left((p+1)\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right)\right)$$

След диференциране на (34), като съставна функция от $y = y(x)$ получаваме

$$\begin{aligned} y^{(p+1)} &= (p-1)! \frac{\left(\cos^p y \sin\left(p\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right)\right)}{dx} \\ &= (p-1)! \frac{\left(\cos^p y \sin\left(p\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right)\right)}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= p! \left(-(\cos^{p-1} y) (\sin y) \sin\left(p\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right) + (\cos^p y) \cos\left(p\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right)\right) y' \\ &= p! \left((\cos^p y) \cos\left(p\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right) - (\cos^{p-1} y) (\sin y) \sin\left(p\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right)\right) \cos^2(y) \\ &= p! \cos^{p+1} \left((\cos y) \cos\left(p\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right) - (\sin y) \sin\left(p\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right)\right) \\ &= p! \cos^{p+1} y \left(\cos\left(p\frac{\pi}{2} + (p+1)y\right)\right) = p! \cos^{p+1} y \left(\sin\left((p+1)\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right)\right), \end{aligned}$$

което показва, че (33) е вярно за $n = p + 1$.

Теорема 7.9 Нека функциите f и g са n -ти диференцируеми и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава

$$(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)} \quad \text{и} \quad (f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}.$$

Доказателство: Ще докажем формулата $(f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$.

Тази формула е вярна за $n = 1$.

Нека да допуснем, че е вярна за $n = p$, т.е. $(f \pm g)^{(p)} = f^{(p)} \pm g^{(p)}$.

Ще покажем, че формулата е вярна за $n = p + 1$. Наистина от равенствата

$$(f \pm g)^{(p+1)} = \left((f \pm g)^{(p)} \right)' = \left(f^{(p)} \pm g^{(p)} \right)' = \left(f^{(p)} \right)' \pm \left(g^{(p)} \right)' = f^{(p+1)} \pm g^{(p+1)}$$

следва верността на формулата за $n = p + 1$. □

Теорема 7.10 (формула на Лайбниц) Нека функциите f и g имат n -та производна. Тогава n -та производна на $f \cdot g$ е равна на

$$(35) \quad (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)},$$

където сме означили $f = f^{(0)}$.

Доказателство: Ще докажем теоремата по индукция.

Нека $n = 1$. Формула (35) е вярна, защото се получава формулата за производна на произведение

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' = \binom{1}{0} f^{(1)} g^{(0)} + \binom{1}{1} f^{(0)} g^{(1)}.$$

Нека формула (35) е вярно за $n = p$

$$(36) \quad (f \cdot g)^{(p)} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)}.$$

Ще докажем, че формула (35) е вярно за $n = p + 1$. След диференциране на (36) намираме

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(p+1)} &= \left((f \cdot g)^{(p)} \right)' = \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f^{(k)} g^{(p-k)} \right)' = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \left(f^{(k)} g^{(p-k)} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(p-k)} + f^{(k)} g^{(p-k+1)} \right) \\ &= f^{(0)} g^{(p+1)} + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\binom{p}{k} + \binom{p}{k+1} \right) f^{(k+1)} g^{(p-k+1)} + f^{(p+1)} g^{(0)} \\ &= f^{(0)} g^{(p+1)} + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k+1} f^{(k+1)} g^{(p-k+1)} + f^{(p+1)} g^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} f^{(k)} g^{(p+1-k)}, \end{aligned}$$

което показва, че формула (35) е вярна за $n = p + 1$. □

Пример 7.26 Намерете $(x^2 e^x)^{(n)}$.

Използвайки основните формули за n -та производна на елементарните функции записваме $(e^x)^{(n)} = e^x$, $(x^2)' = 2x$, $(x^2)'' = 2$ и $(x^2)^{(n)} = 0$, за $n > 2$. Прилагаме Теорема 7.10 и получаваме

$$\begin{aligned}(x^2 e^x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \binom{n}{0} x^2 e^x + 2 \binom{n}{1} x e^x + 2 \binom{n}{2} e^x \\ &= (x^2 + 2nx + n^2 - n) e^x.\end{aligned}$$

Пример 7.27 Намерете $(\arcsin x)^{(n)}$.

Знаем, че $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Тогава от (35) и (30) получаваме

$$\begin{aligned}(\arcsin x)^{(n)} &= ((\arcsin x)')^{(n-1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)^{(n-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^{n-1-k} (2(n-1-k)-1)!! (-1)^k (2k-1)!! (-1)^k}{2^{n-1-k} (1+x)^{n-1-k} \sqrt{1+x} \cdot 2^k (1-x)^k \sqrt{1-x}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1} \sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^{n-1-k} (2(n-k)-3)!! (2k-1)!!}{(1+x)^{n-1-k} (1-x)^k}.\end{aligned}$$

Maple може да бъде използван и за пресмятане на n -производна. Например със следващата команда пресмятаме n -производна на $x^2 e^x$.

diff($x^2 \cdot \exp(x)$, $x\$n$);
 $(n^2 + (2x - 1)n + x^2)e^x$

Нека да споменем, че често *Maple* връща като отговор функции, които са различни от елементарните комбинации на елементарните функции. Например, ако поискаме да пресметнем n -производна на $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ще получим отговор, различен от формула (30).

$$\begin{aligned}&\text{diff}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}, x\$n\right); \\ &\text{expand}\left(\text{diff}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}, x\$n\right)\right); \\ &\frac{\text{pochhammer}\left(\frac{1}{2} - n, n\right) (1+x)^{-\frac{1}{2} - n}}{\sqrt{x}} \\ &\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \sqrt{1+x} (1+x)^n}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Същият вид резултат връща *Maple* при пресмятане на $(\arctg x)^{(n)}$.

$\text{diff}(\arctg(x), x\$n);$

$$\frac{1}{2} 2^n \text{MeijerG}\left(\left[[0, 0, 1/2], []\right], \left[[0], \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n\right]\right], x^2\right) x^{1-n}$$

ЗАДАЧИ:

1) Намерете $f^{(n)}$:

а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$; б) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$; в) $f(x) = \sin^2(x)$;

д) $f(x) = \cos^2(x)$; е) $f(x) = \sin^3(x)$; ж) $f(x) = \cos^3(x)$;

з) $\sin^4 x + \cos^4 x$; и) $e^x \sin x$; й) $e^x \cos x$; к) $\frac{e^x}{x}$; л) $\frac{\ln x}{x}$.

2) Докажете формулите:

а) $\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$; б) $(x^n \ln x)^{(n)} = n! \left(\ln x + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\right)$;

в) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}} (C_n(x) \sin x - S_n(x) \cos x)$, където

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \text{ и } S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

3) Докажете, че за функцията

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

съществува $f^{(n)}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

4) Докажете, че за функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

съществува $f^{(n)}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и не съществува $f^{(n+1)}$.

7.6 Формула на Тейлор

Теорема 7.11 (формула на Тейлор) Нека функцията f има в някоя околност на точката a производна от $(n+1)$ -ви ред, нека x е произволна точка от тази околност и $p > 0$ е произволно число. Тогава съществува ξ между x и a , така че е в сила формулата:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_{n+1}(x),$$

където

$$(37) \quad R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi} \right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Нека отбележим, че $\frac{x-a}{x-\xi} > 0$ за всяко ξ между x и a .

Доказателство: Да положим

$$\varphi_a(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

и да означим $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi_a(x)$.

Нека за определеност приемем, че $x > a$. Случаят $x < a$ се доказва аналогично. Разглеждаме функцията:

$$\psi(t) = f(x) - \varphi_t(x) - (x-t)^p Q(x),$$

където $Q(x) = (x-t)^{-p} R_{n+1}(x)$. Тогава можем да разпишем

$$(38) \quad \psi(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - (x-t)^p Q(x).$$

Очевидно $\psi(a) = \psi(x) = 0$ и функцията ψ удовлетворява условията на Теоремата на Рол и следователно съществува $\xi \in (a, x)$, така че $\psi'(\xi) = 0$.

След диференциране на (38) получаваме

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) + \frac{(k+1)(x-t)^k}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t) \right) \\ &\quad - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + p(x-t)^{p-1} Q(x) \\ &= -\frac{n(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + p(x-t)^{p-1} Q(x) \end{aligned}$$

и от условието $\psi'(\xi) = 0$ следва равенството

$$Q(x) = \frac{n(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi).$$

Следователно получаваме

$$R_{n+1}(x) = (x-a)^p Q(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi} \right)^p \frac{x-\xi}{n!p} f^{(n+1)}(\xi).$$

□

Пример 7.28 Нека $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ е алгебричен полином. Намерете разлагането му по Формулата на Тейлор

От $f^{(n+1)}(x) = 0$ следва че остатъчният член $R_{n+1}(x)$ е равен на нула. Следователно формулата на Тейлор се записва във вида

$$P(x) = P(a) + \frac{x-a}{1!}P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}P^{(2)}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}P^{(n)}(a).$$

Така получихме, че всеки полином може да се запише като полином по степените на $x-a$ за произволно $a \in \mathbb{R}$. При $a = 0$ получаваме, че $P^{(k)}(0) = \frac{a_k}{k!}$.

Твърдение 7.1 Нека f е функция, която удовлетворява условията на Теорема 7.11. Тогава полиномът

$$\varphi_a(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

е такъв че $\varphi_a^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ за всяко $k = 0, 1, 2, \dots, n$, т.е. φ_a и f заедно със производните си до ред n имат еднакви стойности в точката a .

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от дефиницията на φ_a . □

Лема 7.2 Ако функцията $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворява равенствата

$$(39) \quad f(a) = f'(a) = f^{(2)}(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$$

за някое $n \in \mathbb{N}$, тогава $f(x) = o((x-a)^n)$.

Доказателство: Ще проведем доказателството по индукция.

Нека $n = 1$. Тогава $f(a) = f'(a) = 0$. Трябва да докажем: $f(x) = o(x-a)$. Наистина, от границите

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) = 0$$

следва верността на Лемата при $n = 1$.

Да допуснем, че твърдението е вярно за всяко $n \leq p$.

Ще докажем, че твърдението е вярно за $n = p+1$. Ако е в сила

$$f(a) = f'(a) = f^{(2)}(a) = \dots = f^{(p+1)}(a) = 0,$$

то следва, че f' удовлетворява (39) с $n = p$ и съгласно индуктивното предположение $f'(x) = o((x-a)^p)$. От Теорема 6.12 следва, че съществува ξ между x и a , така че

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi) \cdot (x-a) = o((\xi-a)^p) \cdot (x-a) = o((x-a)^p) \cdot (x-a) = o((x-a)^{p+1}).$$

□

Лема 7.2 дава една оценка за остатъчния член във формулата на Тейлор $R_{n+1}(x)$.

Теорема 7.12 (*остатъчен член във форма на Пеано*) Нека функцията f има в някоя околност на точката a производна от $(n+1)$ -ви ред и x е произволна точка от тази околност. Тогава е в сила формулата:

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n).$$

Нека да отбележим, че остатъчният член във формата на Пеано има недостатъка да се прилага само в близост до точката a . Ще преобразуваме остатъчния член от (37) с цел да можем да получим други представяния, при които споменатия недостатък на остатъчния член във формата на Пеано да бъде избегнат.

От това, че точката ξ е между точките a и x следва, че съществува $\theta \in (0, 1)$, така че $\xi - a = \theta(x-a)$. Последното равенство може да бъде записано в еквивалентни форми $\xi = a + \theta(x-a)$ или $(x-\xi) = (x-a)(1-\theta)$ и можем да запишем остатъчния член от (37) във вида

$$(40) \quad R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

1) Ако положим $p = n+1$ в (40) получаваме остатъчен член във формата на Лагранж

$$(41) \quad R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

2) Ако положим $p = 1$ във (40) получаваме остатъчен член във формата на Коши

$$(42) \quad R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

Нека да уточним, че ξ , а следователно и θ зависят от p . Тогава във формата на Лагранж и на Коши стойностите на θ са различни.

Ако изберем в Теорема 7.11 точката $a = 0$, ще получим известната формула на Маклорен.

Теорема 7.13 (*формула на Маклорен*) Нека функцията f има в някоя околност на точката 0 производна от $(n+1)$ -ви ред и x е произволна точка от тази околност. Тогава съществува ξ между x и 0 , така че е в сила формулата:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x),$$

където остатъчният член има вида

1) във формата на Лагранж

$$(43) \quad R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad \theta \in (0, 1);$$

2) във формата на Коши

$$(44) \quad R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad \theta \in (0, 1);$$

3) във формата на Пеано

$$(45) \quad R_{n+1}(x) = o(x^n).$$

Интерес представляват функции, за които можем да докажем, че остатъчният член във формулата на Тейлор клони към нула при $n \rightarrow \infty$. Ако това не е вярно, то тогава формулата на Тейлор не ни дава информация за оценка на стойността на функцията в изследваната точка. Широк клас от функции, за които можем да използваме формулата на Маклорен е класът от функции, за които съществува константа M , така че $|f^{(n)}(x)| \leq M$ за всяко x от множеството, в което изследваме функцията.

Теорема 7.14 *Нека функцията f има в някоя околност на точката 0 производна за всяко $n \in \mathbb{N}$ и x е произволна точка от тази околност. Съществува $M > 0$, така че $|f^{(n)}(x)| \leq M$ за всяко x от разглежданата околност. Тогава е в сила формулата:*

$$(46) \quad f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x),$$

където за остатъчният член имаме оценката

$$(47) \quad |R_{n+1}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Следствие 7.8 *Нека функцията f има в някоя околност на точката 0 производна за всяко $n \in \mathbb{N}$ и x е произволна точка от тази околност. Съществува $M > 0$, така че $|f^{(n)}(x)| \leq M$ за всяко x от разглежданата околност. Тогава за всяко x от разглежданата околност е в сила:*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right).$$

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от Теорема 7.14 и границата $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. □

7.7 Разлагане по формулата на Маклорен на някои елементарни функции

Пример 7.29 Разложете по формулата на Маклорен функцията $f(x) = e^x$ и оценете остатъчния член от формулата на Маклорен.

Използваме (46) и (47). От $(e^x)^{(n)} = e^x$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ получаваме

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x),$$

където за остатъчния член имаме оценката

$$(48) \quad |R_{n+1}(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right|.$$

За всеки интервал $[-a, a]$ е изпълнено неравенството $\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \right| \leq \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a \right|$ и следователно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a \right| = 0$$

за всяко $x \in (-a, a)$.

Можем да използваме командата $taylor(f, x = a, n)$ в *Maple*, която изписва формулата на Тейлор за функцията f в точката a до $f^{(n)}$.

taylor(exp(x), x = 0, 6);

taylor(exp(x), x = 1, 6);

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)$$

$$e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + \frac{e(x-1)^3}{6} + \frac{e(x-1)^4}{24} + \frac{e(x-1)^5}{120} + O((x-1)^6).$$

Недостатък на командата $taylor(f, x = a, n)$ е, че получаваме само разписване на формулата на Тейлор, без да можем да я използваме в следващи пресмятания. Можем да напишем формулата на Тейлор и по друг начин, така че да я използваме и в други пресмятания.

f := x → exp(x);

a := 1;

sum $\left(\frac{x^k}{k!} \cdot D^{(k)}(f)(0), k = 0..5 \right);$

sum $\left(\frac{(x-a)^k}{k!} \cdot D^{(k)}(f)(a), k = 0..5 \right);$

$$x \rightarrow e^x$$

$$1$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

$$e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2} + \frac{e(x-1)^3}{6} + \frac{e(x-1)^4}{24} + \frac{e(x-1)^5}{120}$$

Пример 7.30 Пресметнете с точност $\varepsilon = 0.01$ числата e , \sqrt{e} и e^2 .

Трябва да оценим остатъчния член $R_{n+1}(x)$ за $x = 1, \frac{1}{2}, 2$. Нека разгледаме интервалите $x \in [-a_x, a_x]$, където $a_1 = 2$, $a_{1/2} = 1$, $a_2 = 3$. Искаме

$$\left| \frac{a_x^{n+1} e^{a_x}}{(n+1)!} \right| \leq \left| \frac{a_x^{n+1} 3^{a_x}}{(n+1)!} \right| < 0.01.$$

$$\text{Следователно търсим } n_x, \text{ така че } \left| \frac{1^{n_1+1} 3^2}{(n_1+1)!} \right| < 0.01; \left| \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n_{1/2}+1} 3^1}{(n_{1/2}+1)!} \right| < 0.01; \left| \frac{2^{n_2+1} 3^3}{(n_2+1)!} \right| < 0.01.$$

След решаване на горните неравенства получаваме $n_1 = 6$, $n_{1/2} = 3$ и $n_2 = 9$. Следователно

$$e = e^1 = 1 + \sum_{k=1}^6 \frac{1^k}{k!} = 2.718055556;$$

$$e = e^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^3 \frac{(1/2)^k}{k!} = 1.645833333;$$

$$e = e^1 = 1 + \sum_{k=1}^9 \frac{2^k}{k!} = 7.388712522.$$

Нека да отбележим, че *Maple* не дава функция, която да определя колко събираеми трябва да използваме за да пресмятаме приближени стойности на числа с отнапред зададена точност с помощта на формулата на Тейлор. Затова трябва да напишем програма, която да ни дава до коя производна трябва да разпишем формулата на Тейлор.

Дефинираме в *Maple* функцията на остатъчния член във формата на Лагранж

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} M \text{ за функцията } e^x.$$

$$R := (x, n, M) \rightarrow \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot M;$$

$$(x, n, M) \rightarrow \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Избираме точката x и $a = [x] + 1$, където числото a определя краищата на интервала $[-a, a]$. Параметърът $c = a$ задава стойността, при която се получава максималната стойност на $f^{(n+1)}(x) = e^x$ в интервала $[-a, a]$. Дефинираме числото ε , което дава допустимата грешка, с която искаме да пресметнем числото e^x .

Дефинираме цикъл, който да проверява кога $R(x, n, M) < \varepsilon$ и да изведе стойността на първото n , за което се получава горното неравенство.

Избираме последователно $x = 1$, $x = 1/2$ и $x = 2$.

```
x := 1 : a := floor(x) + 1 : c := a : M := 3c : ε := 0.01 : R(x, 1, M) :
for i from 1 while R(x, i, M) > ε do
R(x, i, M)
end do :
i; R(x, i, M);
6
0.001785714286
```

Извършваме същите пресмятания за $x = \frac{1}{2}$ и $x = 2$.

```
x := 1/2 : a := floor(x) + 1 : c := a : M = 3c : ε := 0.01 : R(x, 1, M) :
for i from 1 while R(x, i, c, e) > ε do
R(x, i, M)
end do :
i; R(x, i, M);
3
0.007812500000
x := 2 : a := floor(x) + 1 : c := a : M := 3c : ε := 0.01 : R(x, 1, M) :
for i from 1 while R(x, i, M) > ε do
R(x, i, M)
end do :
i; R(x, i, M);
9
0.007619047619
```

Ако поискаме да пресметнем e^{10} с точност $\varepsilon = 0.01$, тогава $n_{10} = 38$.

$x := 11 : a := \text{floor}(x) + 10 : c := a : M := 3^c : \varepsilon := 0.01 : R(x, 1, M) :$

$\text{for } i \text{ from } 1 \text{ while } R(x, i, M) > \varepsilon \text{ do}$

$R(x, i, M)$

$\text{end do} :$

$i; R(x, i, M);$

38

0.008684578100

Дефинираме функцията, която задава формулата на Тейлор за функцията e^x

$g := (x, n) \rightarrow \text{sum} \left(\frac{x^k}{k!}, k = 0..n \right);$

$(x, n) \rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$

Пресмятаме стойностите e , \sqrt{e} , e^2 и e^{10} с функцията $g(x, n)$, където $x = 1, \frac{1}{2}, 2, 10$, а $n = 6, 3, 9, 38$.

$\text{evalf}(g(1, 6)); \text{evalf} \left(g \left(\frac{1}{2}, 3 \right) \right);$

$\text{evalf}(g(2, 9)); \text{evalf}(g(10, 38));$

2.718055556

1.645833333

7.388712522

22026.46579.

Ще отбележим, че в действителност получаваме числата с много по-голяма точност от зададената, защото при решаване на неравенството $R_{n+1}(x) < \varepsilon$ правим оценка на остатъчния член отгоре преди да решим неравенството.

$\text{evalf}(\text{exp}(1) - g(1, 9));$

0.000226272,

т.е. получаваме e с точност $\varepsilon = 0,001$.

Пример 7.31 Разложете по формулата на Маклорен функцията $f(x) = \sin x$ и оценете остатъчния член по формулата на Маклорен.

Използваме (46) и (47). От $(\sin x)^{(n)} = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

получаваме

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2n+1}(x),$$

където за остатъчният член имаме оценката

$$(49) \quad |R_{2n+1}(x)| = \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin \left(\theta x + (2n+1) \frac{\pi}{2} \right) \right|.$$

За всеки интервал $[-a, a]$ е изпълнено неравенството

$$\left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin \left(\theta x + (2n+1) \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

и следователно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{n+1}(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$$

за всяко $x \in (-a, a)$.

taylor(sin(x), x = 0, 8);

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + O(x^8).$$

Пример 7.32 Пресметнете с точност $\varepsilon = 0.01$ числата $\sin 1$, $\sin(10)$ и $\sin(1^\circ)$.

Нека първо да припомним, че винаги трябва да преобразуваме градусите в радиани, т.е. реални числа. Тогава $1^\circ = \frac{\pi}{180}$. Трябва да оценим остатъчния член $R_{2n+1}(x)$ за $x = 1, 10, \frac{\pi}{180}$. Да разгледаме интервалите $x \in [-a_x, a_x]$, където $a_1 = 2$, $a_{\frac{\pi}{180}} = 1$, $a_{10} = 11$. Искаме

$$\left| \frac{a_x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq \left| \frac{a_x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| < 0.01.$$

Следователно търсим n_x , така че

$$\left| \frac{1^{2n_1+1}}{(2n_1+1)!} \right| < 0.01; \quad \left| \frac{\left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n_{\frac{\pi}{180}}+1}}{(2n_{\frac{\pi}{180}}+1)!} \right| < 0.01; \quad \left| \frac{10^{2n_{10}+1}}{(2n_{10}+1)!} \right| < 0.01.$$

След решаване на горните неравенства получаваме $n_1 = 3$, $n_{\frac{\pi}{180}} = 1$ и $n_{10} = 29$. Следователно

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 0.8414682540;$$

$$\sin 1^\circ = 1 - \frac{1}{3!} = 0.01745240642;$$

$$\sin(10) = 1 + \sum_{k=1}^{29} \frac{(-1)^k 10^{2k+1}}{2k+1!} = -.5440211109.$$

Реализирането на пресмятанията в *Maple* за $\sin x$ е аналогично на това за e^x .

$$R := (x, n, M) \rightarrow \frac{x^{2 \cdot n + 1}}{(2 \cdot n + 1)!} \cdot M;$$

$$(x, n, M) \rightarrow \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} M.$$

Дефинираме цикъл, който да проверява, кога $R(x, n, M) < \varepsilon$ и да изведе стойността на първото n , за което се получава горното неравенство. Използваме неравенството $M = \sup\{f^{(n)}(x) : x \in \mathbb{R}\} = \sup\{\sin^{(n)}(x) : x \in \mathbb{R}\} = 1$.

$x := 1 : a := \text{floor}(x) + 1 : c := a : M := 1 : \varepsilon := 0.01 : R(x, 0, M) :$
for i from 1 while $R(x, i, M) > \varepsilon$ do
 $R(x, i, M) :$

end do :

$2 \cdot i - 1;$

3

Извършваме същите пресмятания за $x = \frac{\pi}{180}$ и $x = 10$.

$x := \frac{\pi}{180} : a := \text{floor}(x) + 1 : c := a : M = 1 : \varepsilon := 0.01 : R(x, 0, M) :$
for i from 1 while $R(x, i, M) > \varepsilon$ do
 $R(x, i, M) :$

end do :

$2 \cdot i - 1;$

1

$x := 10 : a := \text{floor}(x) + 1 : c := a : M := 1 : \varepsilon := 0.01 : R(x, 0, M) :$
for i from 1 while $R(x, i, M) > \varepsilon$ do
 $R(x, i, M) :$

end do :

$2 \cdot i + 1;$

29

Дефинираме функцията, която задава формулата на Тейлор за функцията $\sin x$.

$$h := (x, n) \rightarrow \text{sum} \left(\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}, k = 0..n \right);$$

$$(x, n) \rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Пресмятаме стойностите $\sin 1$, $\sin 1^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{180}\right)$ и $\sin 10$.

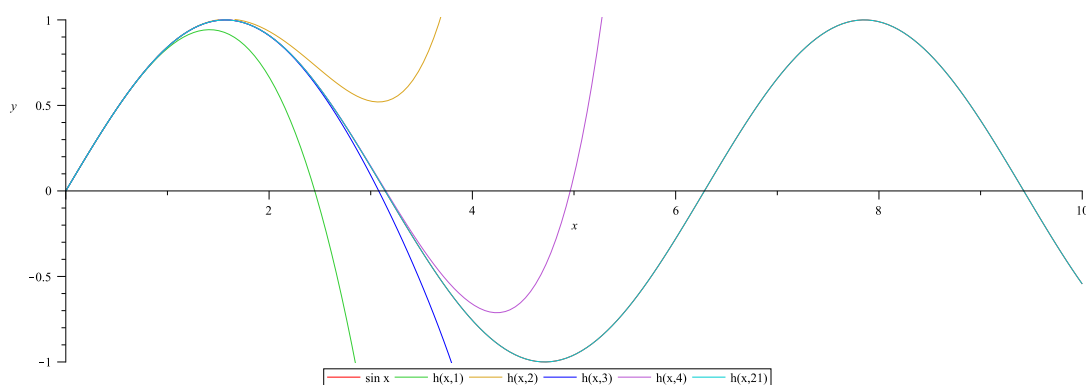
$\text{evalf}(h(1, 3)); \text{evalf}\left(h\left(\frac{\pi}{180}, 1\right)\right); \text{evalf}(g(10, 29));$

0.8414682540

0.01745240642

−.5440211109.

На Фиг. 96 изобразяваме няколко приближения с формулата на Маклорен за функцията $\sin x$. Вижда се, че в разглеждания интервал $\sin x$ и $h(x, 21)$ се препокриват, което



Фигура 96: Графики на функциите $\sin x$ и $h(x, n)$

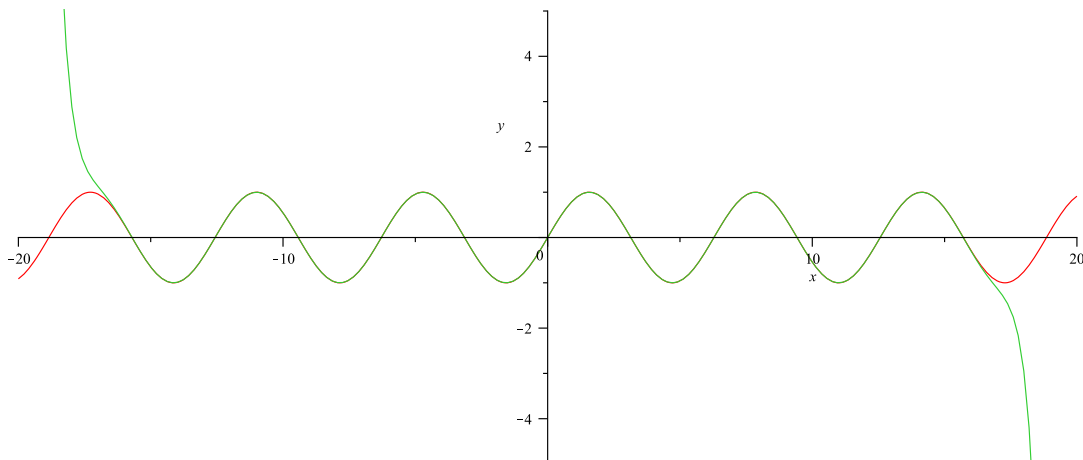
означава, че $h(x, 21)$ дава много добро приближение на функцията $\sin x$ в интервала $[0, 10]$. На Фиг. 97 изобразяваме $h(x, 21)$ и $\sin x$. Вижда се, че за $x > 16$ двете функции започват да се различават съществено. Наистина, каквото и $n \in \mathbb{N}$ да изберем, след като го фиксираме можем да изберем толкова голямо $x \in \mathbb{R}$, че $R_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ да стане по-голямо от всяко отнапред избрано число.

Формулата на Тейлор във вида на Маклорен за функцията $f(x) = \cos x$ в произволен интервал $[-a, a]$ е

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2},$$

където $|R_{2n+2}| \leq \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

Формулата на Тейлор във вида на Маклорен за функцията $f(x) = \ln(1+x)$ в произ-



Фигура 97: Графики на функциите $\sin x$ и $h(x, n)$

волен интервал $(-1, 1]$ е

$$(50) \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + R_{n+1},$$

където $|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1}$ за $x \in [0, 1]$ и $|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{1-r}$, за $-1 < r \leq x \leq 0$.

Формулата на Тейлор във вида на Маклорен за функцията $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $x > -1$ е

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + R_{n+1},$$

където $R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$ и $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$.

При $\alpha = n \in \mathbb{N}$ лесно се получава формулата за Нютоновия бином.

Формулата на Тейлор във вида на Маклорен за $f(x) = \arctg x$, $-1 \leq x \leq 1$ е

$$\arctg x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{2k-1} + R_{2n+1},$$

където $|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{a^{2n+1}}{2n+1}$ за всяко $-1 \leq -a \leq x \leq a \leq 1$.

Ще покажем, че въпреки, че формулата на Тейлор за функциите $\ln(1+x)$ и $\arctg x$ има остъгътен член клонящ към нула само за $|x| \leq 1$, то можем да пресмятаме $\ln x$ и $\arctg x$ с произволно зададена точност за всяко $x \in \mathbb{R}$.

Да пресметнем $\ln a$, където $a > 0$. Всяко $a > 0$ се представя по единствен начин във вида $a = 2^p M$, където $M \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Следователно $\ln a = \ln(2^p M) = p \ln 2 + \ln M$. От (50) следва, че можем да пресмятаме $\ln a$ по формулата

$$\ln a = p \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} M^k}{k} \right) + R_{n+1}(x),$$

където $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{2}{n+1}$.

Възможно е чрез допълнителни преобразования да намалим съществено стойността на остатъчния член R_{n+1} . Нека да положим $x = \frac{M\sqrt{2}-1}{M\sqrt{2}+1}$. Тогава $|x| < 0.172$, $M = \frac{1+x}{\sqrt{2}(1-x)}$ и

$$\ln a = p \ln 2 + \ln \frac{1+x}{\sqrt{2}(1-x)} = \left(p - \frac{1}{2}\right) \ln 2 + \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Лесно се съобразява, че формулата на Маклорен за $\ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ е

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{2x^{2k-1}}{2k-1} + R_{2n+1}(x),$$

където

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(x) &= \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \left(\frac{1}{(1+\theta x)^{2n+1}} + \frac{1}{(1-\theta x)^{2n+1}} \right) \\ (51) \quad &\leq \frac{(0,172)^{2n+1}}{2n+1} (1 + (0,828)^{2n+1}) \\ &= \frac{1}{2n+1} ((0,172)^{2n+1} + (0,208)^{2n+1}) < 2 \cdot (0,208)^{2n+1}. \end{aligned}$$

Веднага се забелязва, че ако искаме да пресметнем с точност 0,0001, то според (50) трябва да вземем

$$\ln a = p \ln 2 + \left(\sum_{k=1}^{100000} \frac{(-1)^{k+1} M^k}{k} \right),$$

докато според (51) е достатъчно да пресметнем

$$\ln a = p \ln 2 + \sum_{k=1}^5 \frac{2x^{2k-1}}{2k-1},$$

където разбира се $x = \frac{M\sqrt{2}-1}{M\sqrt{2}+1}$ и приемаме, че $\ln 2$ сме го пресметнали със зададената точност.

ЗАДАЧИ:

1) Разложете до x^{10} по формулата на Маклорен функциите:

а) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$; б) $f(x) = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$; в) $f(x) = \sqrt[m]{a^m+x}$;

г) $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x}$; д) $f(x) = e^{2x-x^2}$; е) $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$;

ж) $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$; з) $f(x) = \ln(\cos x)$; и) $f(x) = \sin(\sin x)$.

2) Разложете до x^{10} по формулата на Тейлор около точката $x = a$ функциите:

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$; б) $f(x) = x^x - 1$, $x = 1$; в) $f(x) = x^6 + 3x^4 - 2x^3 + x^2$, $x = 1$;

г) $f(x) = x^6 + 3x^4 - 2x^3 + x^2$, $x = 2$; д) $f(x) = \sin^2 x - x^2 e^{-x}$, $x = 0$;

е) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $x = 1$.

3) Пресметнете приближено с точност ε :

а) $\sqrt[3]{30}$, $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,001$; б) $\sqrt[5]{250}$, $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,001$; в) $\sin(18^\circ)$, $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,001$;

г) $\ln 12$, $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,001$; д) $\operatorname{arctg}(0.35)$, $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,001$; е) $\sqrt{\ln(3)}$, $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon = 0,001$.

7.8 Пресмятане на граници с помощта на формулата на Тейлор

Формулата на Тейлор–Маклорен е мощен апарат за пресмятане на граници. Намерените разлагания на функции с формулата на Маклорен в околност на точката $x = 0$ характеризират поведението им в околност на нулата с произволно избрана точност. Ще използваме формулите на Маклорен за основните елементарни функции с остатъчен член във формата на Пеано за пресмятане на граници.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

Пример 7.33 Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Използваме представянето $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$ и получаваме

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^4)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3!} + o(x) \right) = -\frac{1}{3!}.$$

Пример 7.34 Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$.

От знаменателя съобразяваме, че определяща роля би трябвало да играят събираемите в които участва x^4 . Използваме представянето $\sin x = x + o(x)$, $x^3 \sin x = x^4 + o(x^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$, $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2)$. Заместваме $t = -\frac{x^2}{2}$ и получаваме $e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$. Сега можем да пресметнем границата

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)}{x^4 + o(x^4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \left(\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right)}{x^4 \left(1 + \frac{o(x^4)}{x^4} \right)} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Пример 7.35 Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{x^2}{2} \right) \frac{1}{x(\sin x - x)}$.

Ще пресметнем границата като използваме преобразованието $a^b = e^{b \ln a}$. Следователно търсим границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x(\sin x - x)} \ln \left(\cos x + \frac{x^2}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\cos x + \frac{x^2}{2} \right)}{x(\sin x - x)}.$$

От знаменателя съобразяваме, че определяща роля би трябвало да играят събираемите в които участва x^4 . Използваме представянето $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$ и получаваме оценка на знаменателя $x(\sin x - x) = x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x \right) = -\frac{x^4}{3!} + o(x^5)$. За числителя използваме представянето $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ и заместваме в $\ln \left(\cos x + \frac{x^2}{2} \right)$. Получаваме, че $\ln \left(\cos x + \frac{x^2}{2} \right) = \ln \left(1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right)$. От $\ln(1+t) = t + o(t)$ след заместване на $t = \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$

получаваме $\ln \left(1 + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right) = \frac{x^4}{4!} + o(x^5) + o \left(\frac{x^4}{4!} + o(x^5) \right) = \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$. Пресмятаме границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\cos x + \frac{x^3}{2} \right)}{x(\sin x - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{3!} + o(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \left(\frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right)}{x^4 \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^5)}{x^4} \right)} = -\frac{1}{4}.$$

От непрекъснатостта на функцията e^x следва

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cos x + \frac{x^3}{2} \right)^{\frac{1}{x(\sin x - x)}} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

ЗАДАЧИ:

1) Намерете границите:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt{1+2x}}{x^2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

2) Намерете границите:

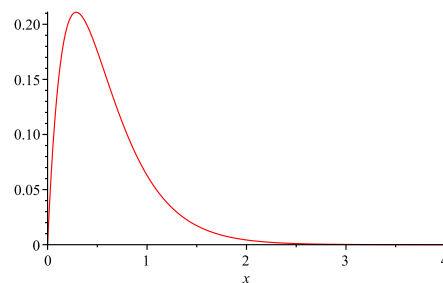
а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$;

7.9 Локални екстремуми

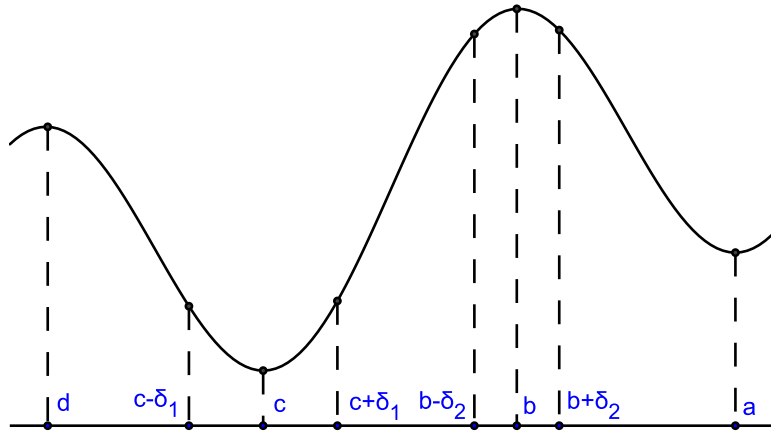
Съществен момент при изследване на различни свойства на модели от живота е установяването на екстремалните свойства. Например модел, описващ концентрацията на лекарство в кръвта за време t след приема на лекарството, се задава с функцията $C(t) = 2(e^{-3t} - e^{-4t})$. Намерете момента, в който концентрацията на лекарство е най-голяма. Графиката на функцията $C(t)$ на Фиг. 98 показва, че точка с това свойство съществува.

В този параграф ще разработим техника за намиране на такива екстремални точки за функции, които имат производни в целия интервал, или точките, в които нямат производни, са изолирани.



Фигура 98: Графиката на функцията $C(t) = 2(e^{-3t} - e^{-4t})$

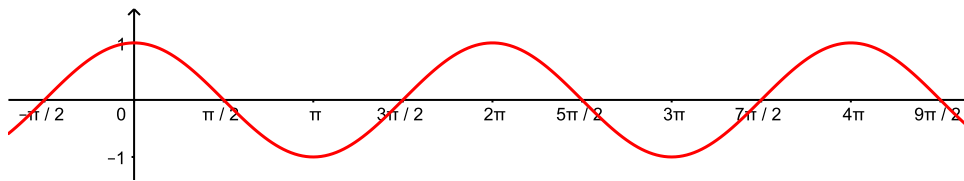
Определение 7.4 1) Казваме, че функцията $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ има локален максимум в точката $c \in D$, ако съществува $\delta > 0$, така че $f(c) \geq f(x)$ за всяко $x \in (c - \delta, c + \delta) \subset D$.
 2) Казваме, че функцията $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ има локален минимум в точката $c \in D$, ако съществува $\delta > 0$, така че $f(c) \leq f(x)$ за всяко $x \in (c - \delta, c + \delta) \subset D$.



Фигура 99: Локален максимум и локален минимум на функция

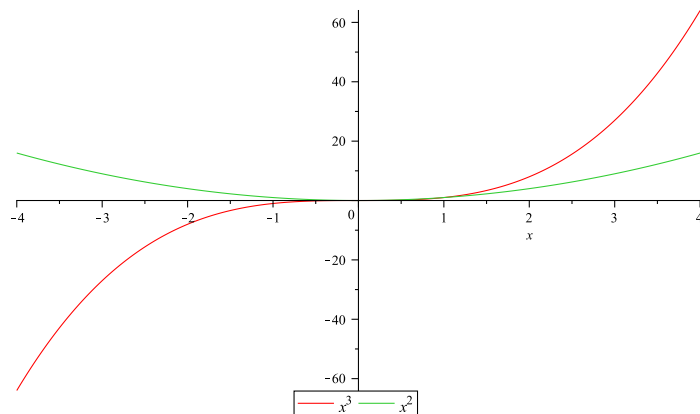
Функцията от Фиг. 99 има локален максимум в точките b и d и локален минимум в точките a и c .

Пример 7.36 Функцията $f(x) = \cos x$ има безброй много локални максимуми, защото $\cos(2n\pi) = 1$ за всяко $n \in \mathbb{Z}$ и $-1 \leq \cos x \leq 1$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Тя има и безброй много локални минимума, защото $\cos((2n + 1)\pi) = -1$ за всяко $n \in \mathbb{Z}$ (Фиг. 100).



Фигура 100: Локален максимум и локален минимум на функцията $\cos x$

Пример 7.37 Функцията $f(x) = x^2$ има единствен локален минимум, защото $f(x) = x^2 \geq 0 = f(0)$ (Фиг. 101). Функцията $f(x) = x^3$ няма нито локален минимум, нито локален максимум.



Фигура 101: Графика на функциите x^2 и x^3

Определение 7.5 Ако в точката x_0 функцията f има локален максимум или локален минимум, казваме, че в точката x_0 функцията f има локален екстремум.

От Теорема 6.9 знаем, че ако диференцируемата функция f има локален екстремум в точката x_0 , то $f'(x_0) = 0$. Както се вижда от примера $f(x) = x^3$, това не е достатъчно условие за локален екстремум, защото $f'(x) = 3x^2$ е равно на нула при $x = 0$, но функцията x^3 няма локален екстремум в точката $x = 0$.

Определение 7.6 Казваме, че точката x_0 е стационарна точка за функцията f , ако $f'(x_0) = 0$.

Съгласно Теорема 6.9 всяка стационарна точка е точка на възможен екстремум. За да можем да направим заключението, че дадена стационарна точка е точка на локален екстремум е необходима допълнителна информация за функцията и производната ѝ.

Теорема 7.15 Нека функцията f е диференцируема навсякъде в околност на точката x_0 и точката x_0 е стационарна точка за f . Тогава

- 1) ако съществува $\delta > 0$, така че: $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то f има локален максимум в точката x_0 ;
- 2) ако съществува $\delta > 0$, така че: $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то f има локален минимум в точката x_0 ;
- 3) ако съществува $\delta > 0$, така че: $f'(x)$ има един и същи знак в интервалите $(x_0 - \delta, x_0)$ и $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то f няма локален екстремум в точката x_0 .

Доказателство: 1) Ако съществува $\delta > 0$, така че: $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, тогава са изпълнени всички условия на теоремата на Лагранж за интервала $[x, x_0]$. Следователно съществува $\xi \in (x, x_0)$, така че

$$f(x_0) - f(x) = (x_0 - x)f'(\xi) > 0.$$

Ако съществува $\delta > 0$, така че: $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, тогава са изпълнени всички условия на теоремата на Лагранж за интервала $[x_0, x]$. Следователно съществува $\xi \in (x_0, x)$, така че

$$f(x_0) - f(x) = (x_0 - x)f'(\xi) > 0.$$

Доказателството на 2) е аналогично.

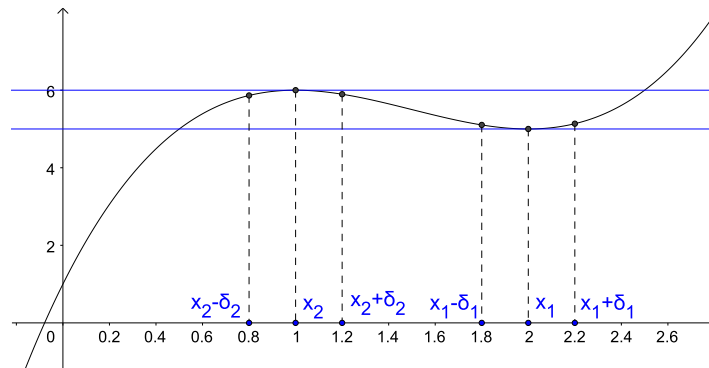
3) Нека за определеност да считаме, че $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. За всеки две x_1, x_2 : $x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta$ повтаряйки расъжденията от 1) получаваме $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. \square

Пример 7.38 Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

След диференциране намираме $f'(x) = 6(x^2 - 3x + 2)$. Определяме стационарните точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ за f , решавайки уравнението $f' = x^2 - 3x + 2 = 0$. Веднага се съобразява, че $f'(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in (1, 2)$. Следователно точката $x_1 = 1$ е точка на локален максимум, а точката $x_2 = 2$ е точка на локален минимум. За по-лесно определяне на точките на локален екстремум и техния вид използваме таблица:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
f		\nearrow	\searrow	\nearrow		
f'		+	0	-	0	+

Използваме означението \nearrow , когато функцията е растяща и \searrow , когато функцията е намаляваща. Използваме означението +, когато производната на функцията е положителна и -, когато производната на функцията е отрицателна.



Фигура 102: Графика на функцията $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

Пример 7.39 Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^3$.

След диференциране получаваме $f'(x) = (x+2)(5x+4)(x-1)^2$. Намираме стационарните точки за f , като решим уравнението $f'(x) = (x+2)(5x+4)(x-1)^2 = 0$. Следователно точките $x_1 = -2$ и $x_2 = -\frac{4}{5}$ и $x_3 = 1$ са стационарни. В този случай е по-трудно да се съобразят знаците на първата производна в различните интервали. Използваме, че f' е непрекъснатата функция, която е нула само в намерените стационарни точки. Следователно за всеки един интервал с краища стационарни точки или безкрайност f' ще има един и същи знак. Пресмятаме f' в произволна вътрешна точка за тези интервали и нейният знак определя знака за целия интервал. Пресмятаме $f'(2) > 0$, $f'(0) > 0$, $f'(-1) < 0$ и $f'(-3) > 0$. Попълваме таблицата:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{5}$	1	$+\infty$	
f		\nearrow	\searrow	\nearrow	\nearrow	
f'		$+$	0	$-$	0	$+$

и получаваме, че точката $x_1 = -2$ е точка на локален максимум, точката $x_2 = -\frac{4}{5}$ е точка на локален минимум, а точката $x_3 = 1$ не е точка на локален екстремум.

Всички тези проверки могат да бъдат направен и в *Maple*. Да разгледаме отново Примери 7.38 и 7.39.

Командата *extrema*($f(x)$, ограничения, променливи, s') решава поставената задача за намиране на локален екстремум на функцията f . За ограничение записваме {}, което означава, че няма ограничения. *Maple* присвоява в s стойностите на променливата, в които има възможност f да има локален екстремум.

extrema($1 + 12 \cdot x - 9 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3$, {}, { x }, s');

{5, 6}

s ;

{{ $x = 1$ }, { $x = 2$ }}

extrema(($x + 2$)² · ($x - 1$)³, {}, { x }, s');

{ $0, \frac{-26244}{3125}$ }

s ;

{{ $x = -2$ }, { $x = 1$ }, { $x = \frac{-4}{5}$ }}

Забелязваме, че *Maple* връща като отговор стойностите на функцията и точките, в които са получават локалните екстремуми, но не може да определи вида на локалния екстремум. За целта да използваме функцията *minimize*($f, x = a..b, location$) за намиране на минимум или *maximize*($f, x = a..b, location$) за намиране на максимум. Веднъж локализирали точките на локален екстремум, стартираме

```

minimize(1 + 12 · x - 9 · x2 + 2 · x3, x = 0..1.5, location);
1., [x = 0., 1.]

```

Полученият отговор за минимум при $x = 0$, показва, че в точката $x = 1$, няма локален минимум. Тогава проверяваме за максимум.

```

maximize(1 + 12 · x - 9 · x2 + 2 · x3, x = 0..1.5, location);
6., [x = 1., 6.]

```

Следователно в точката $x = 1$ функцията има локален максимум със стойност 6.

Можем да не използваме вградената процедура в *Maple* за намиране на екстремални стойности, а да напишем последователността от действия, които решават проблема за намиране на екстремални стойности за функция, която е диференцируема в целия изследван интервал.

```

f := x → 1 + 12 · x - 9 · x2 + 2 · x3;
f1 := D(f);
solve(f1(x) = x);
solve(f1(x) > 0, x);
solve(f1(x) < 0, x)

x → 1 + 12 · x - 9 · x2 + 2 · x3
x → 12 - 18 · x + 6 · x2
2, 1;
RealRange(-∞, Open(1)), RealRange(Open(2), ∞)
RealRange(Open(1), Open(2))

f := x → (x + 2)2 · (x - 1)3;
f1 := D(f);
solve(f1(x) = x);
solve(f1(x) > 0, x);
solve(f1(x) < 0, x)

x → (x + 2)2 · (x - 1)3
x → (2(x + 2))(x - 1)3 + 3(x + 2)2(x - 1)2
1, 1, -2,  $-\frac{4}{5}$ ;
RealRange(-∞, Open(-2)), RealRange( $Open\left(-\frac{4}{5}\right)$ , Open(1)), RealRange(Open(1), ∞)
RealRange( $Open(1)$ ,  $Open\left(-\frac{4}{5}\right)$ )

```

Ако поискаме да решим неравенствата $f1(x) \geq 0$, тогава точката 1 ще принадлежи на решението.

Теорема 7.16 Нека функцията f е диференцируема навсякъде в околност на точката x_0 и има крайна втора производна в точката x_0 и точката x_0 е стационарна точка за

f . Тогава

- 1) ако $f''(x_0) > 0$, то f има локален минимум в точката x_0 ;
- 2) ако $f''(x_0) < 0$, то f има локален максимум в точката x_0 .

Доказателство: 1) От условието $f''(x_0) > 0$ следва че функцията f' е растяща в точката x_0 и от $f'(x_0) = 0$ следва, че съществува околност на точката x_0 , където f' е отрицателна отляво на точката x_0 и положителна отдясно на точката x_0 .

Доказателството на 2) е аналогично. \square

Пример 7.40 Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

Намираме първата и втората производни $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ и $f''(x) = 12x - 18$. Решаваме уравнението $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0$ и получаваме стационарните точки $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Пресмятаме стойностите на втората производна в стационарните точки $f''(2) = 6$ и $f''(1) = -6$ и следователно в точката $x_1 = 2$ функцията има локален минимум и в точката $x_2 = 1$ функцията има локален максимум.

С командата $D^{(n)}(f)$ дефинираме в *Maple* n -тата производна за функцията f .

$f := x \rightarrow 1 + 12 \cdot x - 9 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3;$

$f1 := D(f); f2 := D^{(2)}(f);$

$r := \text{solve}(f1(x) = x);$

$f2(r[1]); f2(r[2]);$

$x \rightarrow x \rightarrow 1 + 12 \cdot x - 9 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3$

$x \rightarrow 12 + 6x^2 - 18x$

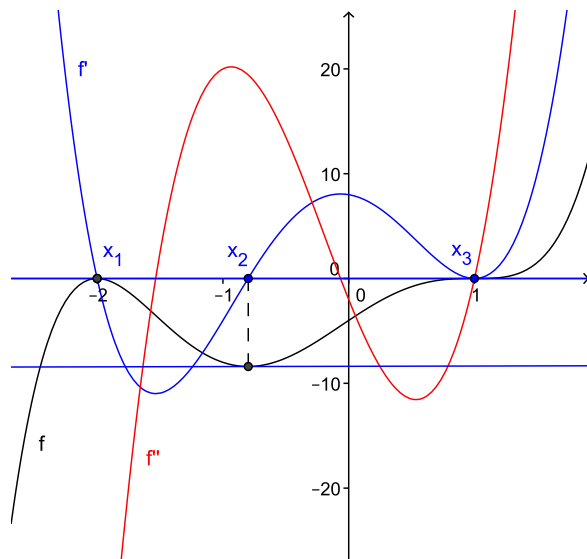
$x \rightarrow 12x - 18$

2, 1;

6; -6

Пример 7.41 Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^3$.

Намираме първата и втората производни $f'(x) = (x + 2)(5x + 4)(x - 1)^2$ и $f''(x) = 2(x - 1)(10x^2 + 16x + 1)$. Решаваме уравнението $f'(x) = (x + 2)(5x + 4)(x - 1)^2 = 0$ и получаваме стационарните точки $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$, $x_4 = -\frac{4}{5}$. Пресмятаме стойностите на втората производна в стационарните точки $f''(1) = 0$, $f''(-2) = -54$ и $f''\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{486}{25}$ и следователно в точката $x_3 = -2$ функцията има локален максимум и в точката $x_4 = -\frac{4}{5}$ функцията има локален минимум. Според Теорема 7.16 не можем да кажем нищо за точката $x = 1$. На Фиг. 103 са дадени графиките на f , f' и f'' .



Фигура 103: Графики на функциите $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$, f' и f''

```

f := x → (x + 2)2 · (x - 1)3;
f1 := D(f); f2 := D(2)(f);
r := solve(f1(x) = x);
f2(r[1]); f2(r[2]); f2(r[3]); f2(r[4]);
x → x → (x + 2)2(x - 1)3
x → (2(x + 2))(x - 1)3 + 3(x + 2)2(x - 1)2
x → 2(x - 1)3 + (12(x + 2))(x - 1)2 + 6(x + 2)2(x - 1)
1, 1, -2, - $\frac{4}{5}$ ;
0, 0, -54,  $\frac{486}{25}$ 

```

Теорема 7.17 Нека $n \in \mathbb{N}$ е нечетно число и нека функцията f има производна от ред n в някоя околност на точката x_0 и има крайна $n+1$ -ва производна в точката x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$. Тогава

- 1) ако $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то f има локален минимум в точката x_0 ;
- 2) ако $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, то f има локален максимум в точката x_0 .

Доказателство: 1) От $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ и $f^{(n)}(x_0) = 0$ следва, че в достатъчно малка околност на точката x_0 имаме $f^{(n)}(x) < 0$ за $x < x_0$ и $f^{(n)}(x) > 0$ за $x > x_0$.

От формулата на Тейлор следва, че съществува ξ между x_0 и x , така че

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

и получаваме

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Тогава от нечетността на n следва, че f има локален минимум в точката x_0 . Наистина, ако $x < x_0$ тогава $x - x_0 < 0$ и за всяко $\xi \in (x, x_0)$ е в сила неравенството $f^{(n)}(\xi) < 0$; ако $x > x_0$ тогава $x - x_0 > 0$ и за всяко $\xi \in (x, x_0)$ е в сила неравенството $f^{(n)}(\xi) > 0$. Следователно и в двата случая имаме неравенството $(x - x_0)^n f^{(n)}(\xi) > 0$. \square

Теорема 7.18 Нека $n \in \mathbb{N}$ е четно число и нека функцията f има производна от ред n в някоя околност на точката x_0 , има крайна $n + 1$ -ва производна в точката x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ и $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Тогава точката x_0 не е точка на локален екстремум за функцията f .

Доказателство: От $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ и $f^{(n)}(x_0) = 0$ следва, че в достатъчно малка околност на точката x_0 функцията $f^{(n)}$ си сменя знака в точката x_0 .

От формулата на Тейлор следва, че съществува ξ между x_0 и x , така че

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

и получаваме

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Тогава от четността на n следва, че знакът на $f(x) - f(x_0)$ зависи от знака на $f^{(n)}(\xi)$ като $f(x) - f(x_0)$ има различни знаци при x , намиращо се от ляво и от дясно на x_0 . Следователно в точката x_0 няма локален екстремум. \square

Пример 7.42 Намерете локалните екстремуми на функцията $f(x) = 20x^9 - 45x^8 + 60x^6 - 36x^5$.

Пресмятаме $f'(x) = 180x^8 - 360x^7 + 360x^5 - 180x^4 = 180x^4(x - 1)^3(x + 1)$. От $f'(x) = 0$ следва, че $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = -1$ са стационарни точки за f . Пресмятаме производните

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= 360x^3(4x^2 + x - 2)(x - 1)^2 \\ f^{(3)}(x) &= 720x^2(x - 1)(14x^3 - 7x^2 - 7x + 3) \\ f^{(4)}(x) &= 2160x(28x^4 - 35x^3 + 10x - 2) \\ f^{(5)}(x) &= 302400x^4 - 302400x^3 + 43200x - 4320 \\ f^{(6)}(x) &= 1209600x^3 - 907200x^2 + 43200. \end{aligned}$$

Установяваме

$$\begin{aligned} f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) \neq 0; \\ f^{(2)}(-1) < 0; \end{aligned}$$

и

$$f^{(2)}(1) = f^{(3)}(1) = 0, \quad f^{(4)}(1) > 0.$$

Следователно точката $x_1 = 0$ не е точка на локален екстремум, точката $x_2 = 1$ е точка на локален минимум, точката $x_1 = -1$ е точка на локален максимум.

Следващата процедура, дефинирана в *Maple*, прави проверка за локален максимум с помощта на Теорема 7.17 и Теорема 7.18

```
EXT := proc(f2, t, i)
local j, f3;
j := i; print(factor(f2(t)), t, j);
if f2(t) = 0 then thisproc((D(1))(f2), t, i + 1)
elif type(j, even) then
if 0 < evalf(factor(f2(t))) then print('extremum lokal minimum')
else print('extremum lokal maximum')
end if
else print('no extremum')
end if
end proc;
FEXT := proc(f)
local f1, f2, s, v, c, k, j, A, B;
f1 := D(f); f2 := (D(2))(f);
s := solve(f1(x) = 0, [x]); c := numelems(s);
A := seq(s[i], i = 1..c);
B := [seq(i, i in A)]
for k in B do
EXT(f2, k, 2)
end do
end proc
```

Нека да обясним, защо на няколко пъти дефинираме множеството от точки в които производната е нула. Ще припомним, че командата за решаване на уравнения *solve* връща като отговор решенията с техните кратности. Когато дефинираме множество $A := \{x, y, z, y\}$ например, *Maple* премахва еднаквите елементи и връща като резултат $A = \{x, y, z\}$. Дефинираното по този начин множество на критичните точки $A := \text{seq}(s[i], i = 1..c)$; не позволява да използваме елементите му поотделно. Ето защо после дефинираме множеството $B := [\text{seq}(i, i \in A)]$, получаваме същото множество A , но вече имаме достъп до елементите му, когато дефинираме цикъла *for* $i \in B$.

```
f := x → 20 · x9 − 45 · x8 + 60 · x6 − 36 · x5; FEXT(f);
```

$$x \rightarrow 20x^9 - 45x^8 + 60x^6 - 36x^5$$

$$-1440, -1, 2$$

extremum lokal maximum

$$0, 0, 2$$

$$0, 0, 3$$

$$-4320, 0, 4$$

no extremum

$$0, 1, 2$$

$$0, 1, 3$$

$$2160, 1, 4$$

extremum lokal minimum

Критерият от Теорема 7.17 и Теорема 7.18 обхваща много широк клас от функции, но въпреки всичко той не обединява всички възможни случаи в класа на диференцируемите функции. Ще илюстрираме това със следният пример:

Пример 7.43 *Функцията*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

има минимум в точката $x = 0$ и $f^{(n)}(0) = 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

След няколко диференцирания намираме

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f'''(x) = \left(\frac{24}{x^5} - \frac{36}{x^7} + \frac{8}{x^9}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Лесно се доказва по метода на математическата индукция, че $f^{(n)}(x) = P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$ за всяко $x \neq 0$, където P_{3n} е полином от степен $3n$.

Ще докажем по индукция, че съществува $f^{(n)}(0)$ и $f^{(n)}(0) = 0$.

Наистина

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

Да допуснем, че за $n = p$ е изпълнено $f^{(p)}(0) = 0$. Тогава

$$f^{(p+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(p)}(x) - f^{(p)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} P_{3(p+1)}\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

От дефиницията на f е ясно, че $f(x) > 0$ за всяко $x \neq 0$ и $f(0) = 0$. Следователно f има локален минимум в точката $x = 0$.

Пример 7.44 *Функцията*

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

няма локален минимум в точката $x = 0$ и $f^{(n)}(0) = 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

След няколко диференцирования намираме, че

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f''(x) = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad f'''(x) = \left(\frac{6}{x^4} - \frac{24}{x^6} + \frac{8}{x^8}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Лесно се доказва по метода на математическата индукция, че $f^{(n)} = P_{3n-1} \left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, където P_{3n-1} е полином от степен $3n-1$.

Ще докажем по индукция, че съществува $f^{(n)}(0)$ и $f^{(n)}(0) = 0$.

Наистина

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

Да допуснем, че за $n = p$ е изпълнено $f^{(p)}(0) = 0$. Тогава

$$f^{(p+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(p)}(x) - f^{(p)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} P_{3p+2} \left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

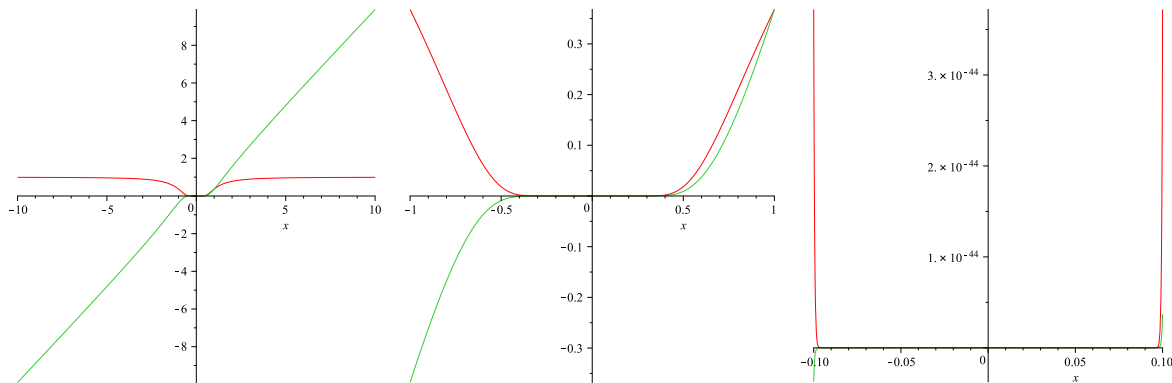
От дефиницията на f се вижда, че $f(u) < f(0) = 0 < f(v)$ за всеки $u < 0 < v$ и следователно f няма локален минимум в точката $x = 0$.

Функциите от Примери 7.43 и 7.44 са такива, че производните им в точката нула от произволен ред са равни на нула. Това означава, че допирателните в точката нула към графиките на функцията и всяка нейна производна са успоредни на оста O_x . На Фиг. 104 са изчертани графиките на двете функции от Примери 7.43 и 7.44 в интервалите $[-10, 10]$, $[-1, 1]$ и $[0.1, 0.1]$.

Разгледахме случаите за съществуване на екстремум в дадена точка x_0 на функция, която е диференцируема в някоя околност на x_0 . Сега ще разгледаме случаите, когато функцията не е диференцируема в точката x_0 , но съществува нейна околност, в която функцията е диференцируема във всяка точка, различна от x_0 .

Теорема 7.19 *Нека функцията f е диференцируема навсякъде в околност на точката x_0 с изключение на точката x_0 и е непрекъсната в точката x_0 . Тогава*

- 1) *ако съществува $\delta > 0$, така че: $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то f има локален максимум в точката x_0 ;*
- 2) *ако съществува $\delta > 0$, така че: $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то f има локален минимум в точката x_0 ;*
- 3) *ако съществува $\delta > 0$, така че: $f'(x)$ има един и същи знак в интервалите $(x_0 - \delta, x_0)$ и $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то f няма локален екстремум в точката x_0 .*



Фигура 104: Графики на функциите $e^{-\frac{1}{x^2}}$, $xe^{-\frac{1}{x^2}}$

Доказателство: Доказателството е аналогично на доказателството на Теорема 7.15.

Ще скицираме доказателството на 1). Нека $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ е произволно избрано. Тогава функцията f удовлетворява условията на Теорема 6.12 в интервала $[x, x_0]$. Следователно съществува $\xi \in (x, x_0)$, така че $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) < 0$. Аналогично, за всяко $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ съществува $\xi_1 \in (x_0, x)$, така че $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_1)(x - x_0) < 0$. Следователно за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ е изпълнено неравенството $f(x) \leq f(x_0)$ и тогава точката x_0 е точка на локален максимум. \square

На Фиг. 105 са начертани графиките на функциите $f(x) = |x|$ и $f(x) = 1 - 2\sqrt[7]{x^2}$, които илюстрират случаите 1) и 2).

За илюстрация на случая 3) ще разгледаме следния пример.

Пример 7.45 Покажете, че функцията

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

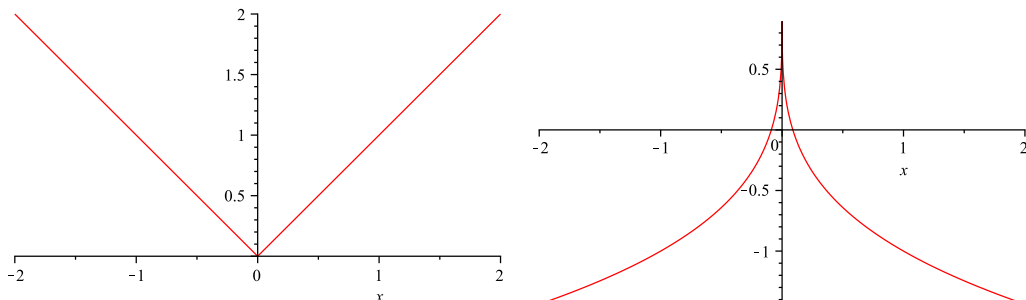
няма локални екстремуми.

Функцията $\frac{x}{1 + e^{1/x}}$ е непрекъсната за всяко $x \neq 0$ и от границата

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = 0$$

следва, че f е непрекъсната функция. Намираме $f'(x)$ за $x \neq 0$

$$(52) \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{e^{1/x}}}{x \left(1 + e^{\frac{1}{x}} \right)^2}.$$



Фигура 105: Графики на функциите $f(x) = |x|$, $f = 1 - 2\sqrt[7]{x^2}$

Ще покажем, че лявата и дясната производни в точката $x = 0$ са различни. Наистина от границите

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 1$$

следва, че $f'(0-) \neq f'(0+)$.

От (52) веднага се вижда, че $f'(x) > 0$ за всяко $x > 0$. Нека $x < 0$. От $\left(1 + e^{\frac{1}{x}}\right)^2 > 0$

следва, че знакът на $f'(x)$ за $x < 0$ се определя от

$$(53) \quad \frac{\frac{1}{x} + x e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1 + e^{-t} - t e^{-t},$$

където сме положили $t = \frac{1}{|x|}$.

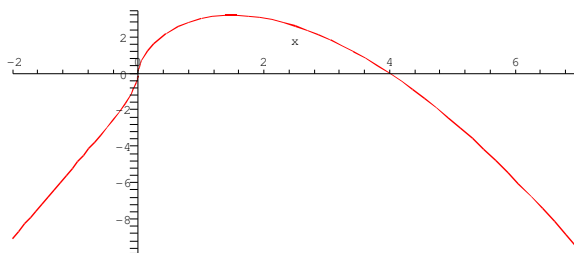
Нека да положим $g(t) = 1 + e^{-t} - t e^{-t}$. От $g'(t) = (1 + e^{-t} - t e^{-t})' = -2e^{-t} + t e^{-t} = e^{-t}(t - 2)$ следва, че $g'(t) < 0$ за $t \in [0, 2)$ и $g'(t) > 0$ за $t \in (2, +\infty)$. Следователно $g(t) \geq g(2) = 1 - e^{-2} > 0$.

Така получихме, че $f'(x) > 0$ за всяко $x \neq 0$ и следователно f няма локални екстремуми.

Ще обединим двата разгледани до момента случая на локален екстремум - точки, в които първата производна е нула и точки, в които първата производна не съществува.

Определение 7.7 *Казваме, че точката x_0 е критична точка за функцията $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ако $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не съществува.*

Пример 7.46 *Намерете критичните точки на функцията $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4 - x)$.*



Фигура 106: Графика на функцията $f(x) = x^{\frac{3}{5}}(4 - x)$

Използвайки правилата за диференциране получаваме:

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}(4 - x) - x^{\frac{3}{5}} = \frac{3(4 - x)}{5x^{\frac{2}{5}}} - x^{\frac{3}{5}} = \frac{3(4 - x) - 5x}{5x^{\frac{2}{5}}} = \frac{12 - 8x}{5x^{\frac{2}{5}}}$$

за $x \neq 0$. От определението за производна намираме

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{4 - x}{x^{\frac{2}{5}}} = +\infty.$$

Следователно критичните точки са $3/2$ и 0 (Фиг. 106), защото $f'(x) = 0$ в точката $x = 3/2$ и f' не съществува в точката $x = 0$.

Можем да изкажем Теоремата на Ферма в термините на критична точка.

Теорема 7.20 *Ако $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема с изключение на краен брой точки и има локален максимум или минимум в точката x_0 , то x_0 е критична точка за функцията f .*

Задачи:

1) Намерете локалните екстремуми на функцията:

- а) $f(x) = x^2 e^{-x}$; б) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4x}$; в) $f(x) = -x^2 \sqrt[5]{(x-2)^2}$;
 г) $f(x) = \frac{14}{x^4 - 8x^2 + 2}$; д) $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$; е) $f(x) = x^2 \ln x$;
 ж) $f(x) = x \ln^2 x$; з) $f(x) = x^4 e^{-x^2}$; и) $f(x) = \sin(3x) - 3 \sin x$;
 й) $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$; к) $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}$; л) $f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1}$.

2) Намерете локалните екстремуми на функцията:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} |x| \left(2 + \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

7.10 Най-голяма и най-малка стойност на функция

Едно от най-важните приложения на производните е в оптимизационните задачи.

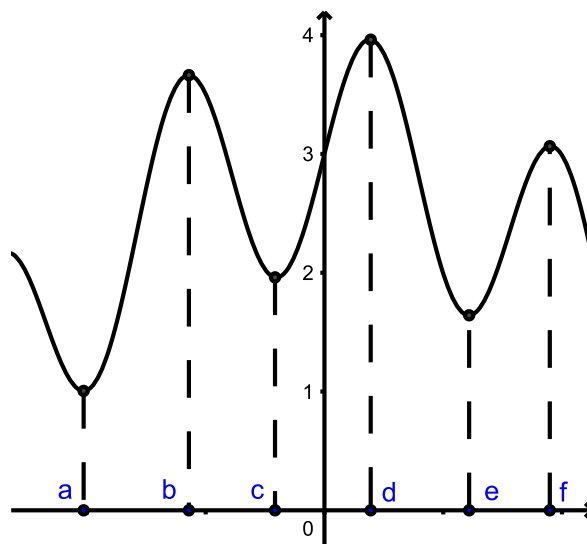
Определение 7.8 1) Казваме, че функцията $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ има най-голяма стойност в $x_0 \in D$, ако $f(x_0) \geq f(x)$ за всяко $x \in D$. Стойността $f(x_0)$ се нарича най-голяма стойност на f в D .

2) Казваме, че функцията $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ има най-малка стойност в $x_0 \in D$, ако $f(x_0) \leq f(x)$ за всяко $x \in D$. Стойността $f(x_0)$ се нарича най-малка стойност на f в D .

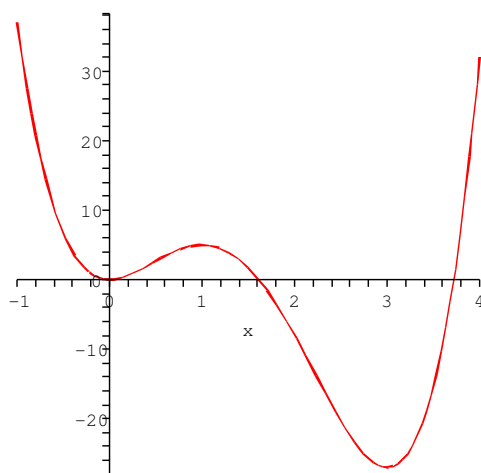
На Фиг. 107 е изобразена функция F , която има локални максимуми в b , d и f , има най-голяма стойност в d , има локални минимуми в a , c и e , има най-малка стойност в a .

Пример 7.47 Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, за $-1 \leq x \leq 4$.

От графиката, показана на Фиг. 108 се вижда, че $f(1) = 5$ е локален максимум, докато най-голямата стойност на функцията е $f(-1) = 37$. Стойността $f(0) = 0$ е локален минимум, но глобалният минимум е $f(3) = -27$, който е и локален минимум, за разлика от $f(-1)$,



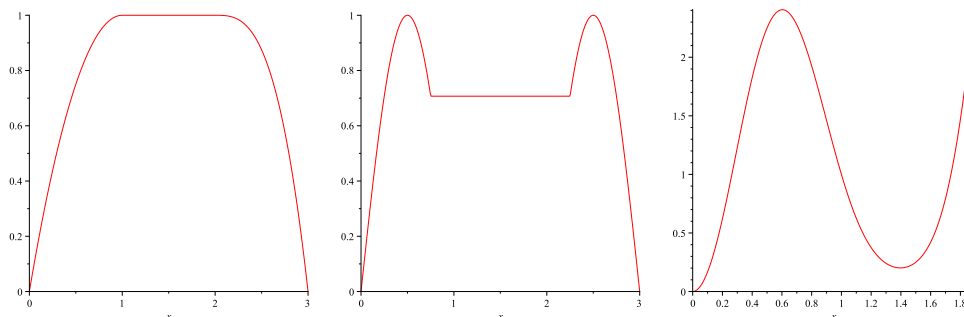
Фигура 107: Най-голяма и най-малка стойност на функция



Фигура 108: Най-голяма и най-малка стойност на функцията $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ в интервала $[-1, 4]$

която не е локален максимум, защото е край на дефиниционния интервал. Ще използваме Теорема 5.8, за да конструираме процедура, с която да намираме най-голямата и най-малката стойност на функция, която е непрекъсната и точките, в които няма производна

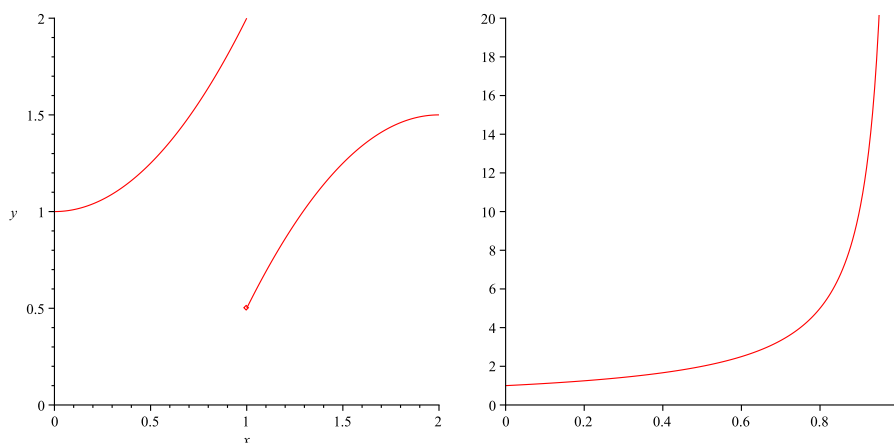
са изолирани. Нека дадем нов изказ на Теорема 5.8: Всяка непрекъсната функция, дефинирана в краен и затворен интервал достига своята най-голяма и най-малка стойност.



Фигура 109: Примери за най-голяма стойност на функция

Графиките на Фиг. 109 показват, че глобалните екстремуми могат да се достигат и в повече от една точка.

Ако функцията не е непрекъсната или не е дефинирана в краищата на интервала не можем да прилагаме Теорема 5.8, както е видно от Фиг. 110.



Фигура 110: Примери на функции, за които не можем да приложим Теорема 5.8

Метод за намиране на най-голяма и най-малка стойност Нека функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната и точките, в които няма производна, са краен брой:

- 1) Намират се критичните точки на f в интервала (a, b) и се пресмятат стойностите на функцията f в тези точки;
- 2) Пресмятат се стойностите $f(a)$ и $f(b)$;

3) Най-голямата и най-малката от намерените стойности в точки 1), 2) са съответно най-голямата и най-малката стойност на f в $[a, b]$.

Пример 7.48 Намерете най-голямата и най-малката стойност на $f(x) = \frac{x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + x^5 + \frac{5x^4}{4} - 2x^3 + 1$ в интервалите $[-2, 4]$ и $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Първо намираме производната $f' = x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 6x^2 = (x-1)(x+1)x^2(x-2)(x-3)$. Решаваме уравнението $f'(x) = 0$ и намираме критичните точки $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Проверяваме кои от критичните точки принадлежат на множеството $[-2, 4]$ и установяваме, че всичките критични точки принадлежат на $[-2, 3]$. Пресмятаме $f(-2) = -\frac{1399}{21}$, $f(-1) = \frac{191}{84}$, $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{47}{84}$, $f(2) = \frac{41}{21}$, $f(3) = -\frac{107}{28}$, $f(4) = \frac{3029}{21}$. Намираме

$$\max \left\{ -\frac{1399}{21}, \frac{191}{84}, 1, \frac{47}{84}, \frac{41}{21}, -\frac{107}{28}, \frac{3029}{21} \right\} = \frac{3029}{21} = f(4).$$

и

$$\min \left\{ -\frac{1399}{21}, \frac{191}{84}, 1, \frac{47}{84}, \frac{41}{21}, -\frac{107}{28}, \frac{3029}{21} \right\} = -\frac{1399}{21} = f(-2).$$

Проверяваме кои от точките принадлежат на множеството $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ и получаваме, че $0, 1, 2 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ и $-1, 3 \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Пресмятаме $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{431}{336}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{31}{1344}$, $f(0) = 1$, $f(1) = \frac{47}{84}$, $f(2) = \frac{41}{21}$. Намираме

$$\max \left\{ \frac{431}{336}, 1, \frac{47}{84}, \frac{41}{21}, -\frac{31}{1344} \right\} = \frac{41}{21} = f(2).$$

и

$$\min \left\{ \frac{431}{336}, 1, \frac{47}{84}, \frac{41}{21}, -\frac{31}{1344} \right\} = -\frac{31}{1344} = f(-0.5).$$

Ще напишем процедура, която да намира най-голямата и най-малката стойност на функция в краен затворен интервал.

```

f := x →  $\frac{x^7}{7} - \frac{5 \cdot x^6}{6} + x^5 + \frac{5 \cdot x^4}{4} - 2 \cdot x^3 + 1$  :
f1 := D(f) :
sol := solve(f1(x) = 0, [x]) : s := numelems(sol) :
sol := solve(f1(x) = 0, x) :
A := {seq(eval(x, sol[i]), i = 1..s)}; B := [seq(i, i in A)];
a :=  $-\frac{1}{2}$ ; b :=  $\frac{5}{2}$ ; j := 1;
for i in B do
c := i;
if a ≤ c ≤ b then
f(i) : print(c, f(i), j); v[j] := f(i); j := j + 1
end if
end do;
f(a); v[j] := f(a); print(a, f(a), j); j := j + 1;
f(b); v[j] := f(b); print(b, f(b), j);
L := seq(v[i], i = 1..j);
max(L); min(L)

```

$[-1, 0, 1, 2, 3]$

0, 1

$\left\{ \frac{431}{336}, 1, \frac{47}{84}, \frac{41}{21}, -\frac{31}{1344} \right\}$

$\frac{41}{21}, -\frac{31}{1344}$

Можем да използваме дефинираните в *Maple* функции *maximize* и *minimize*, които дават най-голямата и най-малката стойност на функцията в указания интервал.

```

maximize  $\left( \frac{x^7}{7} - \frac{5 \cdot x^6}{6} + x^5 + \frac{5 \cdot x^4}{4} - 2 \cdot x^3 + 1, x = -\frac{1}{2}.. \frac{5}{2}, location \right)$ ;
minimize  $\left( \frac{x^7}{7} - \frac{5 \cdot x^6}{6} + x^5 + \frac{5 \cdot x^4}{4} - 2 \cdot x^3 + 1, x = -\frac{1}{2}.. \frac{5}{2} \right)$ ;

```

$41 \setminus 21, \{[x = 2, 41/21]\}$

$-\frac{31}{1344}$

Ако използваме допълнителния параметър *location* в командите *maximize* или *minimize*, то освен стойността на екстремума получаваме като отговор и точката в която той се достига.

Пример 7.49 Намерете най-голямата и най-малката стойност на $f(x) = x^3 - 3x$ в интервала $[-2, 2]$.


```

f := x → x3 − 3 · x :
f1 := D(f) :
sol := solve(f1(x) = 0, [x]) : s := numelems(sol) :
sol := solve(f1(x) = 0, x) :
A := {seq(eval(x, sol[i]), i = 1..s)} : B := [seq(i, i ∈ A)]);
a := −2 : b := 2 : j := 1 :
for i in B do
c := i :
if a ≤ c ≤ b then
f(i) : v[j] := f(i); j := j + 1
end if
end do;
f(a); v[j] := f(a) : j := j + 1 :
f(b); v[j] := f(b) :
L := seq(v[i], i = 1..j);
max(L); min(L)
[−1, 1]
{−2, 2}
2, −2.
maximize (x3 − 3 · x, x = −2..2);
minimize (x3 − 3 · x, x = −2..2);
2, −2

```

Можем да намираме най-голяма и най-малка стойност на функция и в безкраен интервал, ако съществува $M > 0$, така че $f : (-\infty, -M] \cup [M, +\infty) \subseteq f([-M, M])$. Частен случай е когато съществуват $l \in \mathbb{R}$ и $M > 0$, така че $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in f([-M, M])$

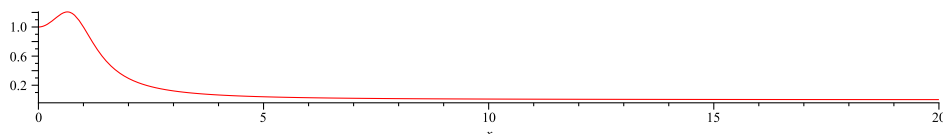
Пример 7.50 Намерете най-голямата и най-малката стойност на $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ в интервала $[0, +\infty)$.

Първо намираме производната $f' = -\frac{2x(x^4 + 2x^2 - 1)}{(1+x^4)^2}$. Решаваме уравнението $f'(x) = 0$ и определяме критичните точки $\left\{0, \sqrt{\sqrt{2}-1}, -\sqrt{\sqrt{2}-1}\right\}$. Проверяваме кои от точките принадлежат на множеството $[0, +\infty)$ и получаваме, че $0, \sqrt{\sqrt{2}-1} \in [0, +\infty)$ и $-\sqrt{\sqrt{2}-1} \notin [0, +\infty)$. Пресмятаме $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} = 0$. Нека да разгледаме $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Веднага се съобразява, че f е намаляваща функция в интервала $[2, +\infty)$ и следователно $\sup\{f([2, +\infty))\} = f(2) \leq f([0, 2]$. Пресмятаме $f(0) = 1$, $f\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2}-1)^2}$ и

$f(2) = \frac{5}{17}$. Установяваме $\frac{5}{17} < 1 < \frac{\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2}$ и следователно

$$\max \left\{ \frac{5}{17}, 1, \frac{\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} \right\} = \frac{\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} = f(\sqrt{\sqrt{2} - 1}).$$

От неравенството $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} > 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} = 0$ следва, че f няма най-малка стойност в интервала $[0, +\infty)$.



Фигура 111: Пример 7.50

Пример 7.51 Намерете най-големия елемент на редицата $a_n = \left\{ \frac{n^2}{n^3 + 200} \right\}$.

Нека да разгледаме функцията $f(x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, която е дефинирана с $f(x) = \frac{x^2}{x^3 + 200}$. Намираме $f'(x) = -\frac{x(x^3 - 400)}{(x^3 + 200)^2}$. Следователно функцията f е растяща в интервала $[0, \sqrt[3]{400}]$ и е намаляваща в интервала $[\sqrt[3]{400}, +\infty)$. От неравенствата $7 < \sqrt[3]{400} < 8$ получаваме, че $\max\{a_n\} = \max\{a_7, a_8\} = \max\left\{ \frac{49}{543}, \frac{8}{89} \right\} = \frac{49}{543}$

Пример 7.52 (принцип на най-малките квадрати) Нека са дадени n числа $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Намерете $x \in \mathbb{R}$, така че $f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$ да има минимална стойност.

Намираме $f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \dots + 2(x - x_n)$. Уравнението $f'(x) = 0$ има единствено решение $x_0 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Намираме $f''(x) = 2n > 0$ за всяко x и следователно точката x_0 е точка на локален минимум. Тъй като f има единствен локален екстремум, то x_0 е точката, в която функцията приема най-малката си стойност.

Задачи:

1) Намерете:

$$\text{a) } \max \left\{ \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2 : x \in [-2, 4] \right\}, \min \left\{ \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2 : x \in [-2, 4] \right\};$$

$$\text{б) } \max \left\{ \sqrt{4-x^2} : x \in [-2, 2] \right\}, \min \left\{ \sqrt{4-x^2} : x \in [-2, 2] \right\};$$

$$\text{в) } \max \left\{ \arctg(x) - \frac{\ln x}{2} : x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \right] \right\}, \min \left\{ \arctg(x) - \frac{\ln x}{2} : x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \right] \right\};$$

$$\text{г) } \max \left\{ 2 \sin x + \sin(2x) : x \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}, \min \left\{ 2 \sin x + \sin(2x) : x \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right] \right\};$$

$$\text{д) } \max \{x - 2 \ln x : x \in [1, e]\}, \min \{x - 2 \ln x : x \in [1, e]\};$$

$$\text{е) } \max \left\{ 2x^3 - 3x^2 - 12 + 1 : x \in \left[-2, \frac{5}{2} \right] \right\}, \min \left\{ 2x^3 - 3x^2 - 12 + 1 : x \in \left[-2, \frac{5}{2} \right] \right\};$$

$$\text{ж) } \max \{x^2 \ln x : x \in [1, e]\}, \min \{x^2 \ln x : x \in [1, e]\};$$

2) Намерете:

$$\text{a) } \max \{xe^{-x} : x \in [0, +\infty)\}, \min \{xe^{-x} : x \in [0, +\infty)\};$$

$$\text{б) } \max \{\sin x \sin(2x) : x \in (-\infty, +\infty)\}, \min \{\sin x \sin(2x) : x \in (-\infty, +\infty)\};$$

$$\text{в) } \max \{e^{-x^2} \cos(x^2) : x \in (-\infty, +\infty)\}, \min \{e^{-x^2} \cos(x^2) : x \in (-\infty, +\infty)\};$$

$$\text{г) } \max \left\{ e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} : x \in (-\infty, +\infty) \right\}, \min \left\{ e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} : x \in (-\infty, +\infty) \right\};$$

3) Намерете най-големият член на редицата:

$$\text{a) } \left\{ \frac{n^{10}}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}; \quad \text{б) } \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+10000} \right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$\text{в) } \{ \sqrt[n]{n} \}_{n=1}^{\infty};$$

4) Докажете неравенствата:

$$\text{a) } |3x - x^3| \leq 2, x \in [-2, 2]; \quad \text{б) } \frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, x \in [0, 1], p > 1;$$

$$\text{в) } x^p(1-x)^q \leq \frac{p^q q^q}{(p+q)^{p+q}}, x \in [0, 1], p, q > 0;$$

$$\text{г) } x + 12^{\frac{n-1}{n}} \leq \sqrt[n]{x^n + 1} \leq x + 1, x \in (0, +\infty), n > 1;$$

$$\text{д) } \frac{2}{3} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2, x \in (-\infty, +\infty).$$

7.11 Изпъкнали функции

Определение 7.9 Казваме, че една функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е изпъкнала в интервала $[a, b]$, ако за всяко $\alpha \in (0, 1)$ и за всеки $x, y \in [a, b]$ е в сила

$$(54) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Ако неравенство (54) е строго, то казваме, че f е строго изпъкнала.

Определение 7.10 Казваме, че една функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е вдлъбната в интервала $[a, b]$, ако за всяко $\alpha \in (0, 1)$ и за всеки $x, y \in [a, b]$ е в сила

$$(55) \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Ако неравенство (7.10) е строго, то казваме, че f е строго вдлъбната.

Очвидно ако функцията f е изпъкнала (вдлъбната), то функцията $-f$ е вдлъбната (изпъкнала).

Пример 7.53 Докажете, че функцията $f(x) = x^2$ е изпъкнала в \mathbb{R} .

От неравенството

$$(\alpha x + (1 - \alpha)y)^2 = \alpha x^2 + (1 - \alpha)y^2 - \alpha(1 - \alpha)(x - y)^2 < \alpha x^2 + (1 - \alpha)y^2$$

следва изпъкналостта на $f(x) = x^2$.

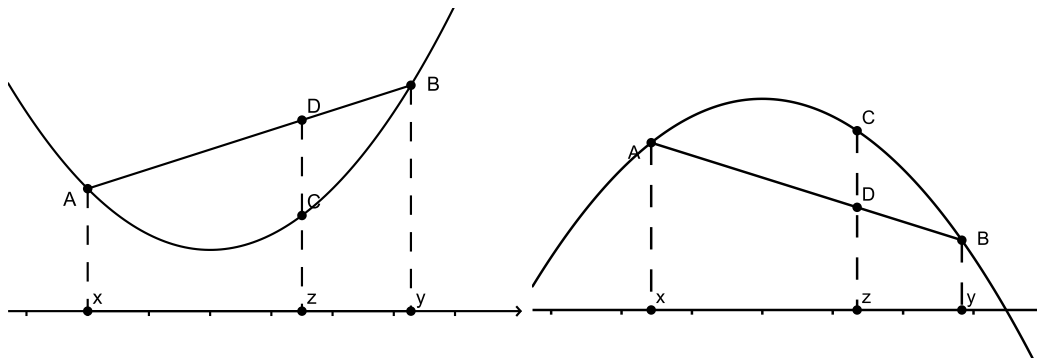
Свойството изпъкналост има прост геометричен смисъл. Точката $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$ принадлежи на отсечката с краища x и y . Също така за всяка точка от отсечката с краища x и y съществува единствено α , така че $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$. Наистина, да разгледаме случая $x < y$. Ако положим $\alpha = \frac{y - z}{y - x}$, то получаваме $1 - \alpha = \frac{z - x}{y - x}$ и $z = \frac{y - z}{y - x}x + \frac{z - x}{y - x}y$. Да разгледаме графиката на функцията f и да въведем точките $A(x, f(x))$, $B(y, f(y))$ и $C(z, f(z))$. Нека точката D е пресечната точка на правата, минаваща през точките $(z, 0)$ и $(z, f(z))$ и отсечката AB . Следователно D има координати $D(z, \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y))$. Тогава неравенство (54) означава, че $f(z) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$, а неравенство (55) – $f(z) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$ (Фиг. 112).

Твърдение 7.2 Ако f е изпъкнала (вдлъбната) функция в интервала (a, b) , то за всяко $k > 0$ функцията kf е изпъкнала (вдлъбната).

Доказателство: Доказателството следва от неравенството

$$kf(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq k\alpha f(x) + k(1 - \alpha)f(y) = \alpha kf(x) + (1 - \alpha)kf(y).$$

□



Фигура 112: Графика на изпъкнала и на вдлъбната функция

Твърдение 7.3 Ако f и g са изпъкнали (вдлъбнати) функции в интервала (a, b) , то функцията $f + g$ е изпъкнала (вдлъбната).

Доказателство: Доказателството следва от неравенството

$$\begin{aligned}
 (f + g)(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= f(\alpha x + (1 - \alpha)y) + g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \\
 &\leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) + \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y) \\
 &= \alpha(f + g)(x) + (1 - \alpha)(f + g)(y)
 \end{aligned}$$

□

Твърдение 7.4 1) Ако f е изпъкнала и растяща функция и g е изпъкнала функция, то съставната функция $f(g)$ е изпъкнала.

2) Ако f е изпъкнала и намаляваща функция и g е вдлъбната функция, то съставната функция $f(g)$ е изпъкнала.

3) Ако f е вдлъбната и растяща функция и g е вдлъбната функция, то съставната функция $f(g)$ е вдлъбната.

4) Ако f е вдлъбната и намаляваща функция и g е изпъкнала функция, то съставната функция $f(g)$ е вдлъбната.

Доказателство: Ще докажем 1). Доказателствата на останалите три случая са аналогични. Използваме едновременно факта, че f е растяща и g е изпъкнала, за да напишем първото неравенство.

$$f(g(\alpha x + (1 - \alpha)y)) \leq f(\alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)) \leq \alpha f(g(x)) + (1 - \alpha)f(g(y)).$$

□

Твърдение 7.5 Нека $y = f(x)$ и $x = g(y)$ са взаимно обратни функции.

- 1) Ако f е изпъкнала и растяща, то g е вдлъбната и растяща.
- 2) Ако f е изпъкнала и намаляваща, то g е вдлъбната и намаляваща.
- 3) Ако f е вдлъбната и растяща, то g е изпъкнала и растяща.
- 4) Ако f е вдлъбната и намаляваща, то g е изпъкнала и намаляваща.

Доказателство: Ще докажем 1). Доказателствата на останалите три случая са аналогични. Да положим $u = f(x)$, $v = f(y)$. От това, че g е обратната функция на f получаваме $g(u) = x$ и $g(v) = y$. Следователно

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) = \alpha u + (1 - \alpha)v.$$

От основното свойство на взаимно обратните функции $g(f(x)) = x$ получаваме неравенствата

$$g(\alpha u + (1 - \alpha)v) \geq g(f(\alpha x + (1 - \alpha)y)) = \alpha x + (1 - \alpha)y = \alpha g(u) + (1 - \alpha)g(v).$$

□

Твърдение 7.6 1) Ако функцията f е изпъкнала в интервала $[a, b]$ и различна от константа, то тя не може да достигне максималната си стойност във вътрешна точка за интервала $[a, b]$.

2) Ако функцията f е вдлъбната в интервала $[a, b]$ и различна от константа, то тя не може да достигне минималната си стойност във вътрешна точка за интервала $[a, b]$.

Доказателство: 1) Нека допуснем противното: съществуват $z \in (a, b)$, така че $f(z) \geq f(x)$ за всяко $x \in [a, b]$. От условието, че f е различна от константа следва, че съществуват $x, y \in [a, b]$, така че $x < z < y$ и $f(z) > f(x)$ и $f(z) > f(y)$. Използвайки изпъкналостта на функцията в интервала $[x, y] \subseteq [a, b]$, записваме

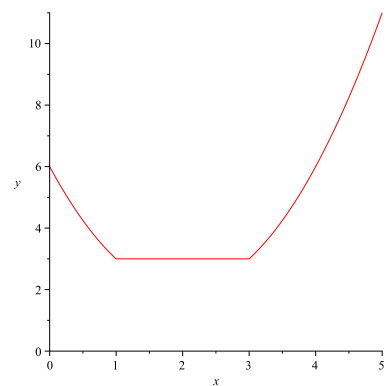
$$f(z) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) < \alpha f(z) + (1 - \alpha)f(z) = f(z)$$

и достигахме до противоречие.

Доказателството на 2) е аналогично.

□

Ако използваме означенията на Фиг. 112, то Твърдение 7.6 1) означава, че дъгата AB от графиката на кривата f или се слива с хордата AB или цялата лежи под хордата AB (Фиг. 113).



Фигура 113: f съвпада с отсечката AB

Твърдение 7.7 1) Ако функцията f е изпъкнала в интервала $[a, b]$, то за всеки интервал $[x, y] \subseteq [a, b]$ неравенство (54) е изпълнено или със знак равно или със знак строго по-малко за всяко $z \in (x, y)$.

2) Ако функцията f е вдлъбната в интервала $[a, b]$, то за всеки интервал $[x, y] \subseteq [a, b]$ неравенство (55) е изпълнено или със знак равно или със знак строго по-голямо за всяко $z \in (x, y)$.

Доказателство: Дефинираме линейната функция $l : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$, която удовлетворява равенствата $l(x) = f(x)$ и $l(y) = f(y)$ т.е. описва хордата AB . Нека разгледаме функцията $g(x) = f(x) - l(x) = f(x) + (-l(x))$, която съгласно Твърдение 7.3 е изпъкнала функция (всяка линейна функция е едновременно и изпъкнала и вдлъбната). Тогава съществуват два случая или $g(x) \equiv 0$ или $g(x) < 0$. Ако $g(x) \equiv 0$, то доказателството се прекратява. Нека да съществува $z \in (x, y)$, така че $g(z) < 0$. Тогава от неравенството $g(x) < 0$ следва, че g достига най-голямата си стойност във вътрешността на интервала $[x, y]$, което противоречи с Твърдение 7.6.

Случаят 2) се доказва аналогично. □

Теорема 7.21 Ако $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е изпъкнала (вдлъбната) в интервала $[a, b]$, то тя е непрекъсната в интервала $(x, y) \subset [a, b]$.

Доказателство: Нека f е изпъкнала и $z \in [x, y]$ е произволна точка. Нека l_x дефинира правата през точките $(x, f(x))$ и $(z, f(z))$, а l_y дефинира правата през точките $(y, f(y))$ и $(z, f(z))$. Ако $u \in (x, z)$ е произволна точка, от изпъкналостта на f следва $f(u) \leq l_x(u)$. От избора на $u \notin [z, y]$ следва $f(u) \geq l_y(u)$. По конструкция имаме равенствата $l_x(z) = f(z) = l_y(z)$ (Фиг. 114). От непрекъснатостта на линейните функции l_x, l_y , неравенството $l_y(u) \leq f(u) \leq l_x(u)$ и Лема 2.2 получаваме

$$f(z) = \lim_{u \rightarrow z} l_x(u) \leq \lim_{u \rightarrow z} f(u) \leq \lim_{u \rightarrow z} l_y(u) = f(z).$$

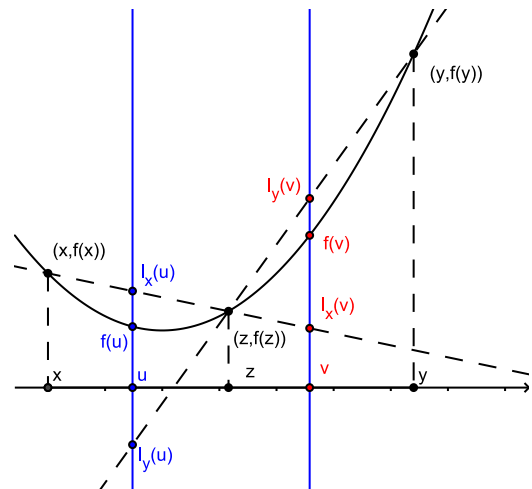
Следователно f е непрекъсната отляво.

Аналогично се доказва, че f е непрекъсната отдясно и следователно f е непрекъсната в точката z .

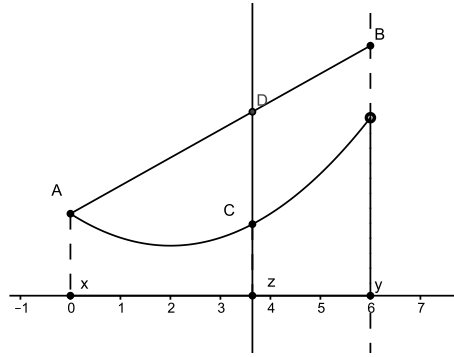
Ако f е вдлъбната функция, тогава разглеждаме функцията $-f$, която е изпъкнала. □

На (Фиг. 115) е даден пример на изпъкнала функция, която не е непрекъсната в десния край на интервала $[x, y]$.

Ще дадем необходими и достатъчни условия за изпъкналост и вдлъбнатост на функции, които са диференцируеми.



Фигура 114: Непрекъснатост на изпъкнала функция



Фигура 115: Точка на прекъсване за изпъкнала функция

Теорема 7.22 Ако $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема, то тя е изпъкнала тогава и само тогава, когато f' е растяща в интервала (a, b) .

Доказателство: Условието за изпъкналост (54) може да се запише във вида

$$f(z) \leq \frac{y-z}{y-x}f(x) + \frac{z-x}{y-x}f(y),$$

където $z = \frac{y-z}{y-x}x + \frac{z-x}{y-x}y$. Така получаваме

$$(y-x)f(z) \leq (y-z)f(x) + (z-x)f(y).$$

С помощта на последното неравенство достигае до еквивалентен запис на условието за изпъкналост (54)

$$(56) \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

След граничен преход в (56) при $z \rightarrow x$ получаваме неравенството

$$(57) \quad f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

След граничен преход в (56) при $z \rightarrow y$ получаваме неравенството

$$(58) \quad f'(y) \geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

От (57) и (58) установяваме, че за произволни $a < x < y < b$ е изпълнено неравенството $f'(x) \leq f'(y)$ и следователно f' е растяща функция в интервала (a, b) .

Нека сега f' е растяща функция в интервала (a, b) . Нека $a < x < y < b$ са произволно избрани и нека $z \in (x, y)$ е произволно. Съгласно Теорема 6.12 съществуват $\xi_x \in (x, z)$ и $\xi_y \in (z, y)$, такива че

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi_x), \quad \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\xi_y).$$

От условието, че f' е растяща функция в интервала (a, b) можем да запишем неравенството

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi_x) \leq f'(\xi_y) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

и следователно f е изпъкнала функция. \square

Следствие 7.9 Ако $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема, то тя е вдлъбната тогава и само тогава, когато f' е намаляваща в интервала (a, b) .

Теорема 7.23 Ако $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема, то тя е изпъкнала тогава и само тогава, когато графиката ѝ лежи над всяка нейна допирателна.

Доказателство: Нека $a < x < z < y < b$ са произволно избрани. Нека $l_z(u) = f(z) + f'(z)(u - z)$ е допирателната към f в точката z . Условието на Теорема 7.23 може да се изкаже във вида: Ако $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема, то тя е изпъкнала тогава и само тогава, когато за всяка точка $z \in (a, b)$ е изпълнено неравенството

$$(59) \quad f(u) \geq l_z(u) = f(z) + f'(z)(u - z), \quad \text{а всяко } u \in (a, b).$$

Лесно се съобразява, че (59) е равносилно на системата неравенствата

$$(60) \quad \begin{cases} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq f'(z) \\ \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \geq f'(z). \end{cases}$$

1) Нека f е изпъкнала функция. Съгласно Теорема 7.22 f' е растяща функция. Следователно съществуват $\xi_x \in (x, z)$ и $\xi_y \in (z, y)$, така че

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi_x) \leq f'(z) \quad \text{и} \quad \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\xi_y) \geq f'(z),$$

което означава че неравенства (60) са изпълнени.

2) Нека са в сила неравенства (60). Да изберем $z = y$ в първото неравенство и $z = x$ във второто неравенство. Получаваме неравенствата

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

и следователно f' е растяща функция и съгласно Теорема 7.22 функцията f е изпъкнала. \square

Следствие 7.10 Ако $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема, то тя е вдлъбната тогава и само тогава, когато графиката ѝ лежи под всяка нейна допирателна.

Пример 7.54 Докажете че за всяко $x \in [0, +\infty)$ е изпълнено неравенството

$$\sqrt[5]{x} \leq \frac{x}{80} + \frac{8}{5}.$$

Да разгледаме функцията $f(x) = \sqrt[5]{x}$. От $f' = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$ следва, че f' е намаляваща и следователно f е вдлъбната функция. Търсим точката $x = a$, в която $f'(a) = \frac{1}{80}$ и намираме $a = 32$. Тогава допирателната в точката $x = 32$ се дефинира с функцията $\frac{x}{80} + \frac{8}{5}$. Съгласно Следствие 7.10 стойностите на функцията f се намират под правата $y = \frac{x}{80} + \frac{8}{5}$.

Теорема 7.24 Ако $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е два пъти диференцируема, то тя е изпъкнала тогава и само тогава, когато $f''(x) \geq 0$ за всяко $x \in (a, b)$.

Доказателство: Доказателството следва непосредствено от Теорема 7.22, защото от $f''(x) \geq 0$ следва, че f' е растяща функция. \square

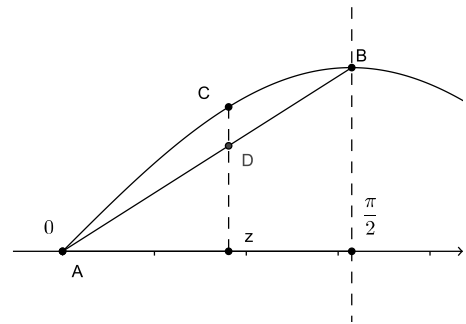
Следствие 7.11 Ако $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е два пъти диференцируема, то тя е вдлъбната тогава и само тогава, когато $f''(x) \leq 0$ за всяко $x \in (a, b)$.

Пример 7.55 Докажете, че за всяко $x \in (0, \pi/2)$ е в сила неравенството $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

Функцията $\sin x$ е вдлъбната в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Наистина $(\sin x)'' = -\sin x \leq 0$ за всяко $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Да разгледаме правата $l(x) = \frac{2}{\pi}x$. Правата l е хорда за $\sin x$ през точките $(0, 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ (Фиг. 116). От вдлъбнатостта на $\sin x$ следва неравенството

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin \left(\alpha 0 + (1 - \alpha) \frac{\pi}{2} \right) \\ &\geq \alpha \sin 0 + (1 - \alpha) \sin \frac{\pi}{2} = (1 - \alpha) = \frac{2}{\pi} z \end{aligned}$$

Пример 7.56 Докажете, че за всяко $x \in [0, 2]$ е в сила неравенството $2^x \leq \frac{3}{2}x + 1$.

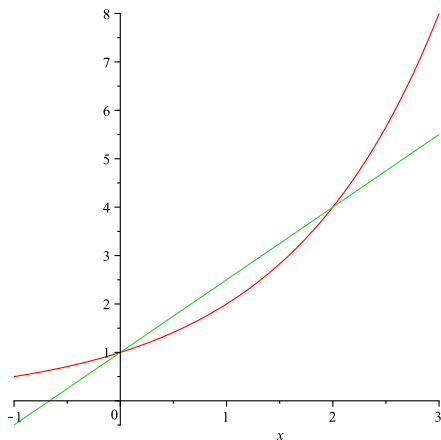


Фигура 116: Графики на функциите $\sin x$ и $\frac{2}{\pi}x$

Функцията 2^x е изпъкнала в интервала $[0, 2]$. Наистина $(2^x)'' = 2^x \ln^2 2 > 0$ за всяко $x \in [0, 2]$. Да разгледаме правата $l(x) = \frac{3}{2}x + 1$. Правата l е хорда за 2^x през точките $(0, 1)$ и $[2, 4]$ (Фиг. 117). От вдлъбнатостта на 2^x следва неравенството

$$2^x \leq \frac{3}{2}x + 1$$

за всяко $x \in [0, 2]$



Фигура 117: Графики на функциите 2^x и $\frac{3}{2}x + 1$

Определение 7.11 Казваме, че точката ξ е инфлексна точка за функцията f , ако съществува $\delta > 0$, така че в двата интервала $(\xi - \delta, \xi)$ и $(\xi, \xi + \delta)$ функцията има различен вид изпъкналост.

Пример 7.57 Намерете интервалите на изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексните точки на функцията $f = \frac{x+1}{x^2+1}$.

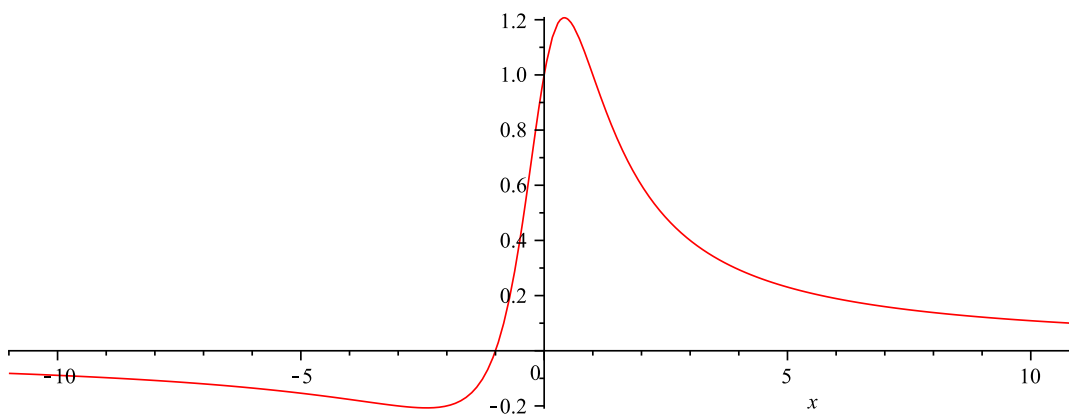
Намираме последователно първата и втората производна на функцията f :

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x(x+1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - 2x - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

и

$$f''(x) = \frac{-(2x+2)(x^2+1)^2 + 2(x^2+1)2x(1-2x-x^2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

Корените на уравнението $f''(x) = 0$ са $x = 1, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$. Търсим интервалите, в които $f''(x) \geq 0$ и $f''(x) \leq 0$. Получаваме, че $f''(x) \geq 0$ за $x \in [-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$ и



Фигура 118: Графика на функцията $f = \frac{x+1}{x^2+1}$

$f''(x) \leq 0$ за $x \in (-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, 1]$. Следователно f е изпъкнала в $[-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}] \cup [1, +\infty)$ и вдлъбната в $(-\infty, -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}, 1]$, а точките $x = 1, -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$ са инфлексни точки на f (Фиг. 118).

Аналогично на изследването на интервалите на растене и намаляване на една функция можем да конструираме процедура в *Maple*, която да определя интервалите на изпъкналост и вдлъбнатост на функция.

```

f := x -> (x + 1) / (x^2 + 1);
f1 := D(f) : factor(f1(x));
f2 := D(2)(f) : factor(f2(x));
s := solve(f2(x) = 0, x);
solve(f2(x) >= 0, x); solve(f2(x) <= 0, x);

x -> (x + 1) / (x^2 + 1);
(x^2 - 1 + 2x) / ((x^2 + 1)^2);
2(x - 1)(x^2 + 4x + 1) / ((x^2 + 1)^3);
1, -2 - sqrt(3), -2 + sqrt(3);
RealRange(-2 - sqrt(3), -2 + sqrt(3)), RealRange(1, infinity);
RealRange(-infinity, -2 - sqrt(3)), RealRange(-2 + sqrt(3), 1)

```

От доказаните до момента Теореме следват:

Теорема 7.25 Ако $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е диференцируема и точката ξ е инфлексна точка за f , тогава точката ξ е точка на локален екстремум за f' .

Теорема 7.26 Ако $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е два пъти диференцируема и точката ξ е инфлексна точка за f , тогава $f''(\xi) = 0$.

Ще илюстрираме с два примера, че условията в Теорема 7.25 и Теорема 7.26 са само необходими, но не са достатъчни.

Пример 7.58 Докажете, че функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \left(\frac{11}{10} + \sin(\ln |x|) \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

удовлетворява условията: f' има екстремум в точката $x = 0$, но точката $x = 0$ не е инфлексна точка за f .

Намираме производните

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\frac{11}{10} + \sin(\ln |x|) \right) = 0$$

и

$$f'(x) = 3x^2 \left(\frac{11}{10} + \sin(\ln |x|) \right) + x^2 \cos(\ln |x|) = \frac{x^2}{10} (33 + 30 \sin(\ln |x|) + 10 \cos(\ln |x|)).$$

Използваме неравенството $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ и получаваме

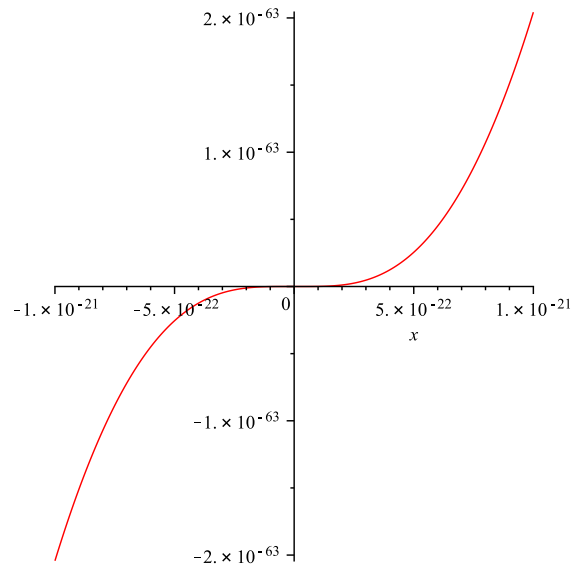
$$f'(x) \geq \frac{x^2}{10} (33 - \sqrt{30^2 + 10^2}) \geq \frac{x^2}{10} (33 - 32) \geq 0.$$

Следователно точката $x = 0$ е точка на локален екстремум за f' .

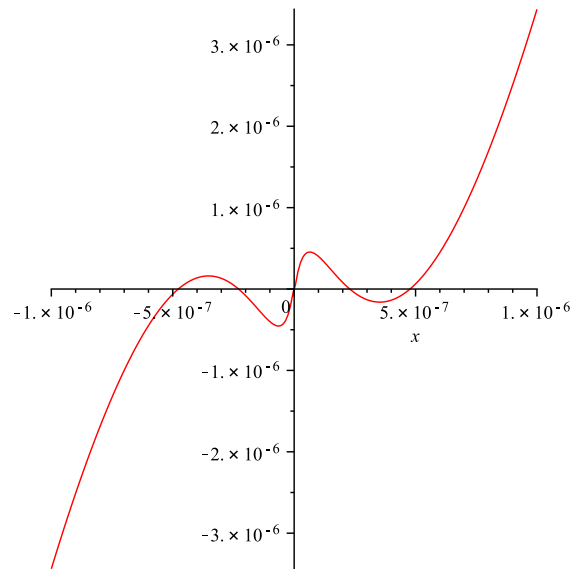
Намираме $f''(x) = \frac{x}{5} (33 + 25(\sin(\ln |x|) + \cos(\ln |x|)))$. Разглеждаме редиците $x_n = e^{-2n\pi + \frac{5\pi}{4}}$ и $y_n = e^{-2n\pi}$. Тогава от неравенствата $f''(x_n) = \frac{e^{-2n\pi + \frac{\pi}{4}}}{5} (33 - 25\sqrt{2}) < 0$ и $f''(y_n) = \frac{e^{-2n\pi}}{5} (33 + 25) > 0$ следва, че f'' си сменя знака във всяка околност на $x = 0$ и следователно $x = 0$ не е инфлексна точка за f . Чрез графиката на функцията f трудно се визуализира фактът, че $x = 0$ не е инфлексна (Фиг. 119). Ето защо на Фиг. 120, където на помощ идва Теорема 7.26 е представена графиката на f'' .

Пример 7.59 Нека разгледаме функцията $f(x) = x^4$.

Веднага се вижда, че $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, но $x = 0$ не е инфлексна точка. Геометричната интерпретация на инфлексната точка е следната:



Фигура 119: Графика на функцията $x^3 \left(\frac{11}{10} + \sin(\ln |x|) \right)$

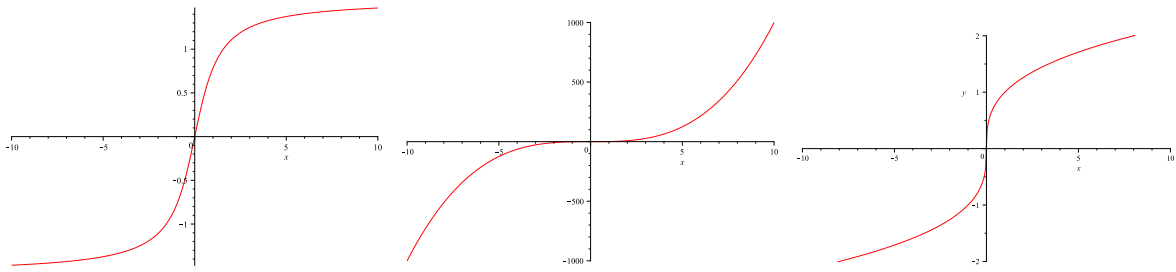


Фигура 120: Графика на функцията $\left(x^3 \left(\frac{11}{10} + \sin(\ln |x|) \right) \right)''$

Теорема 7.27 *Ако функцията f е диференцируема в околност на точката x_0 и има инфлексия в точката x_0 , то графиката на функцията f пресича допирателната си в*

точката $(x_0, f(x_0))$.

Доказателство: Нека x_0 е инфлексна точка и нека приемем, че f е изпъкнала в $(x_0 - \delta, x_0)$, вдлъбната в $(x_0, x_0 + \delta)$ и е диференцируема в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. От Теорема 7.23 и Следствие 7.10 следва, че графиката на f е над допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$ за $x \in (x_0 - \delta, x_0]$ и е под допирателната в точката $(x_0, f(x_0))$ за $x \in [x_0, x_0 + \delta)$. Следователно графиката на f пресича допирателната си в инфлексната си точка (Фиг. 121).



Фигура 121: Графика на инфлексни точки с допирателни с различни ъгови коефициенти

Доказателството в случая, когато f е вдлъбната в $(x_0 - \delta, x_0)$ и е изпъкнала в $(x_0, x_0 + \delta)$ протича аналогично. \square

Пример 7.60 Докажете, че функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \left(2 + \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

удовлетворява условията: допирателната в точката $(0, f(0))$ пресича графиката на f , но точката $x = 0$ не е инфлексна точка за f .

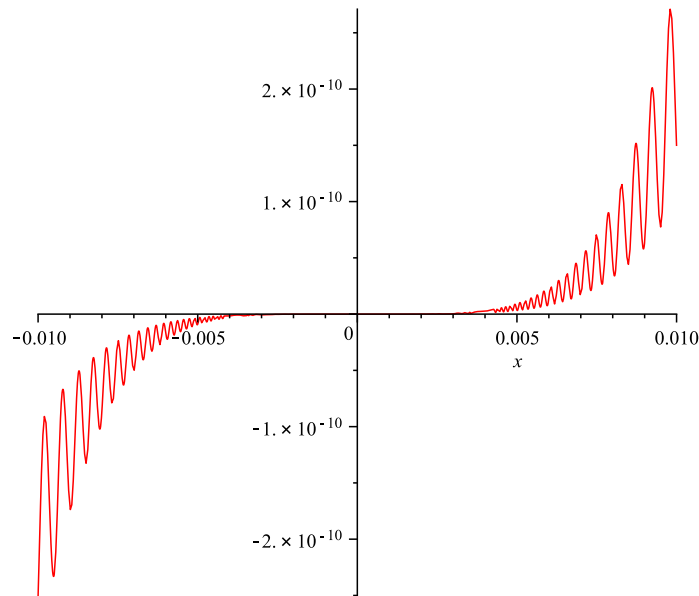
Намираме производните

$$f'(x) = \begin{cases} 5x^4 \left(2 + \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) - x^3 \cos \left(\frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

и

$$f''(x) = \begin{cases} 20x^3 \left(2 + \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) - 8x^2 \cos \left(\frac{1}{x} \right) - x \sin \left(\frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Лесно се съобразява, че редиците $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ и $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ удовлетворяват неравенствата $f''(x_n) = x_n^2(40x_n - 1) < 0$ и $f''(y_n) = x_n^2(40x_n + 1) > 0$, които показват, че f'' сменя



Фигура 122: Графика на функцията $x^5 \left(2 + \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$

знака си от дясно на нулата. Аналогично получаваме, че f'' сменя знака си и от ляво на нулата. Следователно $x_0 = 0$ не е инфлексна точка за f , въпреки, че в точката $(0, f(0))$ допирателната към графиката на f я пресича.

Аналогично на изследването на локалните екстремуми могат да се формулират достатъчни условия за това точки да бъдат инфлексни. Ако функцията има втора производна с изключение в точките, които са изолирани и втората производна е непрекъснатата функция, тогава потенциалните да бъдат инфлексни са точките, в които втората производна не съществува или е равна на нула. После се изследва знакът на втората производна във всеки от получените интервали.

Теорема 7.28 *Нека $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и нека функцията f има производна от ред n в някоя околност на точката x_0 , има крайна $n + 1$ -ва производна в точката x_0 и $f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$ и $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Тогава:*

- 1) *Ако n е четно число, то точката x_0 е инфлексна точка за функцията f .*
- 2) *Ако n е нечетно число, то точката x_0 не е инфлексна точка за функцията f .*

За доказателството и на двете твърдения използваме Теорема 7.17 и Теорема 7.18 и изследваме за локален екстремум f' .

Задачи:

- 1) Намерете интервалите на изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексните точки на f :

а) $f(x) = 3x^2 - x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; в) $f(x) = x + \sqrt[3]{x^5}$;

г) $\sqrt{1+x^2}$; д) $f(x) = x + \sin x$; е) $f(x) = e^{-x^2}$;

ж) $f(x) = \ln(1+x^2)$; з) $f(x) = x \sin(\ln x)$; и) $f(x) = x^x$.

2) Докажете неравенствата:

а) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{x^n + y^n}{2}$, за $x, y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$;

б) $e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}$, за $x \neq y$;

в) $(x+y) \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) < x \ln x + y \ln y$, за $x, y > 0$;

г) $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{\sin x + \sin y}{2}$, за $x, y \in [0, \pi]$, $x \neq y$.

3) Докажете неравенствата:

а) $6 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) > 5 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$; б) $4e^{\frac{13}{4}} < e + 3e^4$.

4) Докажете неравенствата:

а) $2^x + 1 \leq \frac{31}{10}x + \frac{23}{5}$ за всяко $x \in [-1, 4]$;

б) $\ln x \geq \frac{3}{e^4 - e}x + \frac{e^4 - 4e}{e^4 - e}$ за всяко $x \in [e, e^4]$;

в) $\operatorname{arctg}(x) \geq \frac{\pi\sqrt{3}}{12}x + \frac{\pi}{12}$ за всяко $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right]$.

5) Изследвайте за изпъкналост и вдлъбнатост функциите:

а) $e^{\sin x}$ за всяко $x \in [\pi, 2\pi]$; б) $\frac{1}{\ln x}$ за всяко $x \in [2, 8]$;

в) $\ln(\operatorname{arctg} x)$ за всяко $x \in \left[\frac{1}{8}, 8\right]$; г) $\cos(\operatorname{arctg} x)$ за всяко $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

6) Докажете неравенствата:

а) $\sqrt[4]{x} \leq 2x + \frac{3}{8}$ за всяко $x \in [0, +\infty)$;

б) $\ln(x) \leq \frac{x}{e}$ за всяко $x \in (0, +\infty)$;

в) $e^x \geq ex$ за всяко $x \in (0, +\infty)$;

г) $e^x \geq e^4 x - 3e^4$ за всяко $x \in (0, +\infty)$;

д) $\operatorname{arctg} x \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi - 2}{4}$ за всяко $x \in (0, +\infty)$.

7.12 Неравенство на Йенсен

Неравенството, което дефинира изпъкналите функции може да се обобщи за произволен брой събираеми.

Теорема 7.29 (неравенство на Йенсен) Нека $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е изпъкнала функция. Тогава за всеки x_1, x_2, \dots, x_n , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $0 \leq \alpha_i$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството:

$$(61) \quad f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Неравенството (61) може да се запише еквивалентно във вида

$$(62) \quad f\left(\frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$$

за всеки x_1, x_2, \dots, x_n , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $0 \leq \alpha_i$.

Доказателство: Доказателството ще проведем по индукция.

При $k = 2$ неравенството (62) е определението за изпъкналост. Да допуснем че неравенството (62) е изпълнено за $k = n$. ще покажем, че то е изпълнено и за $k = n + 1$. Нека фиксираме числата x_1, x_2, \dots, x_n , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и да положим $p_n = \alpha_n + \alpha_{n+1}$ и $y_n = \frac{\alpha_n}{p_n} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{p_n} x_{n+1}$. Според индуктивното предположение неравенството (62) е изпълнено за $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, p_n$, защото

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k + p_n = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$$

и

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_k + p_n y_n = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k.$$

Така получаваме

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}\right) &= f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k x_k + p_n y_n}{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k + p_n}\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f(x_k) + p_n f(y_n)}{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k + p_n} \\
 &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f(x_k) + p_n f\left(\frac{\alpha_n}{p_n} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{p_n} x_{n+1}\right)}{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k + p_n} \\
 &\leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k f(x_k) + p_n \frac{\alpha_n}{p_n} f(x_n) + p_n \frac{\alpha_{n+1}}{p_n} f(x_{n+1})}{\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k + p_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k}
 \end{aligned}$$

□

Йохан Йенсен (1859–1925) е датски математик и инженер. Той е бил президент на Датското математическо общество от 1892 до 1903. Йенсен е роден в Nakskov, но прекарва голяма част от детството си в Швеция, защото баща му работи там. Йенсен става студент в Copenhagen College of Technology. В университета той изучава математика, дори публикува статии по математика, но съвремените за момента математически теми той изучава сам чак след дипломирането си. Йенсен никога не е заемал академична длъжност. Той работи като инженер в Copenhagen Telephone Company от 1881 до 1924 и става ръководител на техническия отдел през 1890. Всичките математически изследвания Йенсен прави през свободното си време.



Теорема 7.30 (неравенство на Йенсен) Нека $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е вдлъбната функция. Тогава за всеки x_1, x_2, \dots, x_n , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, $0 \leq \alpha_i$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството:

Фигура 123: Johan Ludvig William Valdemar Jensen

$$(63) \quad f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Често използван частен случай на Теорема 7.29 и Теорема 7.30 се получава при $\alpha_i = \frac{1}{n}$.

Следствие 7.12 (неравенство на Йенсен) Нека $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е изпъкнала функция. Тогава за всеки x_1, x_2, \dots, x_n е изпълнено неравенството:

$$(64) \quad f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n}.$$

Следствие 7.13 (неравенство на Йенсен) Нека $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е вдлъбната функция. Тогава за всеки x_1, x_2, \dots, x_n е изпълнено неравенството:

$$(65) \quad f\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) \geq \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n}.$$

Пример 7.61 (неравенство между средно хармонично, средно геометрично и средно аритметично) Докажете неравенствата

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

за всеки $x_i \in (0, +\infty)$.

Нека да разгледаме функцията $f(x) = x \ln x$. След диференциране получаваме $f'(x) = 1 + \ln x$ и $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ за всяко $x > 0$ и следователно f е изпъкнала функция. Съгласно Теорема 7.29 в сила е неравенството

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n (p_i x_i \ln x_i)}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{\ln (x_1^{p_1 x_1} x_2^{p_2 x_2} \dots x_n^{p_n x_n})}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

и след преобразуване намираме

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \leq (x_1^{p_1 x_1} x_2^{p_2 x_2} \dots x_n^{p_n x_n})^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i x_i}}.$$

Полагаме $p_i = \frac{1}{x_i}$ и получаваме

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Нека да разгледаме функцията $f(x) = \ln x$. След диференциране получаваме $f'(x) = \frac{1}{x}$ и $f''(x) = -\frac{1}{x^2} > 0$ за всяко $x > 0$ и следователно f е вдлъбната функция. Съгласно Следствие 7.12 е изпълнено неравенството

$$\ln \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \geq \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} = \ln \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

От факта, че $\ln x$ е монотонно растяща функция следва верността на неравенството

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

ЗАДАЧИ:

1) Докажете неравенството

$$\left(\frac{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \cdots + x_n^\alpha}{n} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(\frac{x_1^\beta + x_2^\beta + \cdots + x_n^\beta}{n} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

за $x_i > 0$ $\alpha < \beta$.

2) Докажете неравенството $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10} + \left(y + \frac{1}{y}\right)^{10} + \left(z + \frac{1}{z}\right)^{10} \leq \frac{10^{10}}{3^9}$, за $x, y, z > 0$.

3) Докажете неравенството $x^5 + y^5 + z^5 \leq x^5 \sqrt{\frac{x^2}{yz}} + y^5 \sqrt{\frac{y^2}{xz}} + z^5 \sqrt{\frac{z^2}{yx}}$, за $x, y, z > 0$.

7.13 Построяване на графика на функция

Визуалното представяне на функция като графика дава възможност за по-лесно възприемане на свойствата, които има функцията. Апаратът на диференциалното смятане дава много добри възможности за изследване на функциите и построяване на графиките им. Много от компютърните програми изчертават графика на функция като пресмятат стойностите на функцията в много точки. Този метод дава добро приближение на функцията, но винаги може да се получат пропуски при някои частни случаи. Нека е дадена функцията $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$. Пресмятаме стойностите на функцията f в редиците от точки, заключени в интервала $[-2, 2]$:

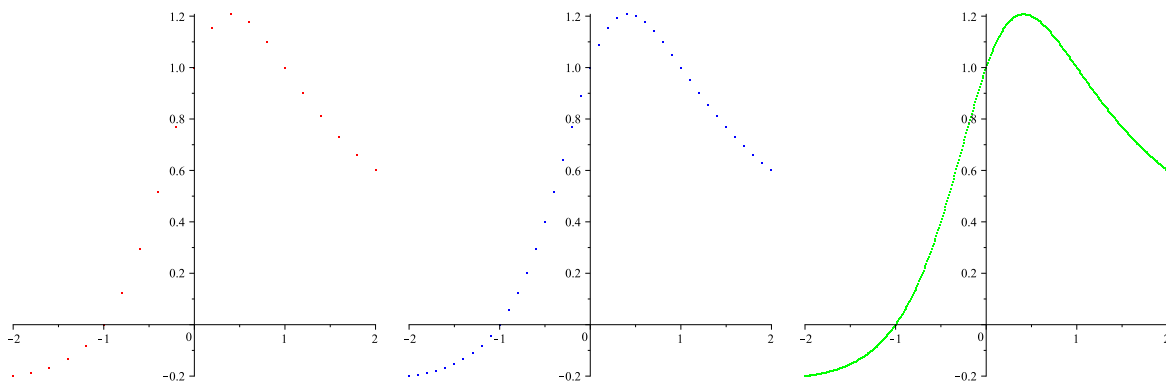
- 1) $\{x_n\}_{n=1}^{11}$, където $x_1 = -2$ и $x_n = x_{n-1} + 0,2$
- 2) $\{x_n\}_{n=1}^{21}$, където $x_1 = -2$ и $x_n = x_{n-1} + 0,1$
- 3) $\{x_n\}_{n=1}^{201}$, където $x_1 = -2$ и $x_n = x_{n-1} + 0,01$.

Пресмятаме стойностите $f(x_n)$ и изобразяваме върху декартовата координатна система точките $(x_n, f(x_n))$ (Фиг. 124).

```

f := x →  $\frac{1+x}{1+x^2}$ 
j1 := 1;
for i from -2 by 0.2 to 2 do
l1[j1, 1] := i : l1[j1, 2] := f(i) : j1 := j1 + 1 :
end do;
j2 := 1;
for i from -2 by 0.1 to 2 do
l3[j2, 1] := i : l3[j2, 2] := f(i) : j2 := j2 + 1 :
end do;
j3 := 1;
for i from -2 by 0.01 to 2 do
l3[j3, 1] := i : l3[j3, 2] := f(i) : j3 := j3 + 1 :
end do;
with(plots) :
pointplot([seq([l1[n, 1], l1[n, 2]], n = 1..j1 - 1)], color = red, symbol = point);
pointplot([seq([l2[n, 1], l2[n, 2]], n = 1..j2 - 1)], color = blue, symbol = point);
pointplot([seq([l3[n, 1], l3[n, 2]], n = 1..j3 - 1)], color = green, symbol = point)

```

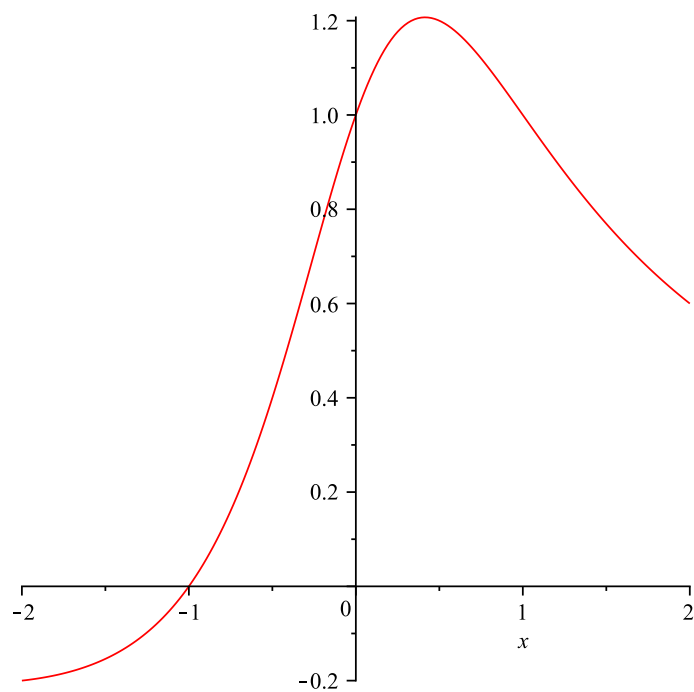


Фигура 124: Графика на функцията $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ при стъпка 0,2, 0,1 и 0,01

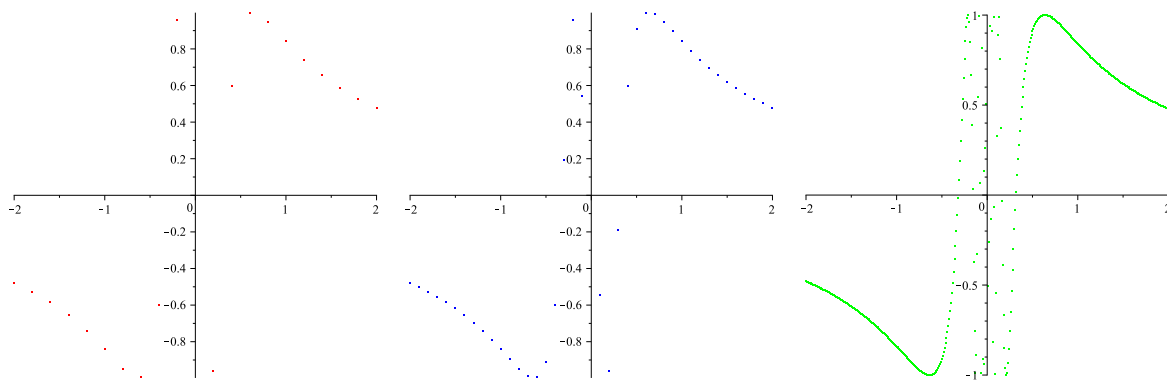
Както се вижда от графиката на Фиг. 124 този метод дава добро приближение на действителната графика на функцията f .

Ако се опитаме да начертаем графиката на функцията $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ няма да получим достатъчно информация за свойствата на функцията f (Фиг. 126).

Както се вижда от графиката на Фиг. 127 методът с пресмятане стойностите на функцията в различни точки не дава добро приближение на действителната графика на функцията f . Методът с пресмятането на функционалните стойности на функцията в различни точки не е удобен, защото се изисква пресмятане в много на брой точки, а освен



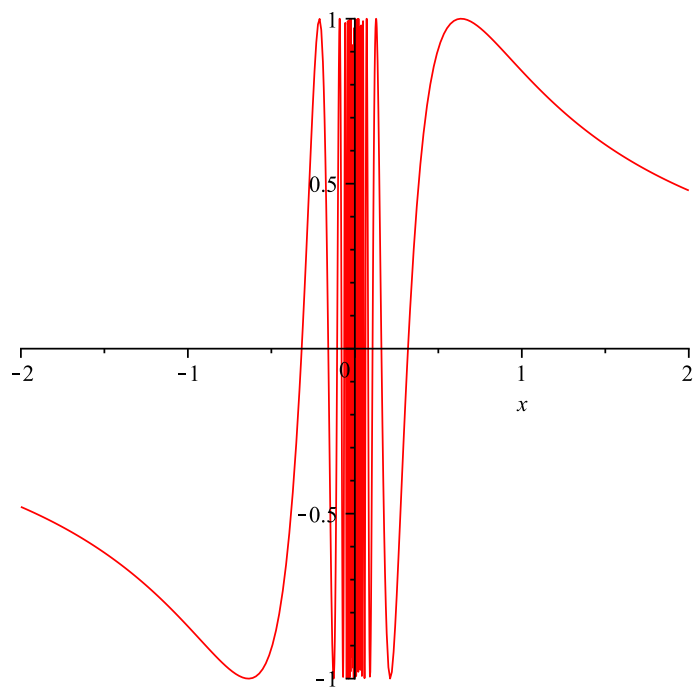
Фигура 125: Графика на функцията $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$



Фигура 126: Графика на функцията $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при стъпка 0,2, 0,1 и 0,01

това случайният избор на точките не гарантира, че ще бъдат уловени особеностите на функцията.

Ще изследваме функции, които имат точки на прекъсване, нямат първа или втора производна в изолирани точки. За функции от този клас ще намерим малък брой точки



Фигура 127: Графика на функцията $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

със специфични свойства, които ще са достатъчни, за да определим вида на графиката на функцията.

Ще отбележим основните стъпки, които трябва да бъдат направени, за да се установят основните свойства на изследваната функция.

- 1) Дефиниционна област на функцията.
- 2) Четност или нечетност на функцията.
- 3) Периодичност на функцията.
- 4) Граница на функцията в краищата на дефиниционната област.
- 5) Асимптоти на функцията.
- 6) Интервали на монотонност на функцията.
- 7) Локални екстремуми на функцията.
- 8) Изследване за изпъкналост и вдлъбнатост на функцията.
- 9) Чертаене на графиката на функцията.

Пример 7.62 *Да се построи графиката на функцията*

$$f(x) = \cos x - \frac{\cos^2 x}{2}.$$

1) ДО = $(-\infty, +\infty)$.

2) Функцията е четна, защото $f(-x) = \cos(-x) - \frac{\cos^2(-x)}{2} = \cos x - \frac{\cos^2 x}{2} = f(x)$.

3) Функцията е периодична с период 2π .

Наистина, $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) - \frac{\cos^2(x + 2\pi)}{2} = \cos x - \frac{\cos^2 x}{2} = f(x)$.

От четността и периодичността на f следва, че е достатъчно да я изследваме в интервала $[0, \pi]$.

4) $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\cos x - \frac{\cos^2 x}{2} \right) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} \left(\cos x - \frac{\cos^2 x}{2} \right) = -\frac{3}{2}$.

5) От периодичността следва, че f няма наклонени асимптоти.

6) $f'(x) = \cos(x) \sin(x) - \sin(x) = \sin(x)(\cos(x) - 1)$. Критични точки са 0 и π . От $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (0, \pi)$ следва, че f е намаляваща в интервала $[0, \pi]$.




7) От четността на f следва, че точката $x = 0$ е точка на локален максимум. От периодичността на f следва, че точката $x = \pi$ е точка на локален минимум.

8) $f''(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) - \cos(x) = \cos^2(x) - 1 + \cos^2(x) - \cos(x) = 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1$.

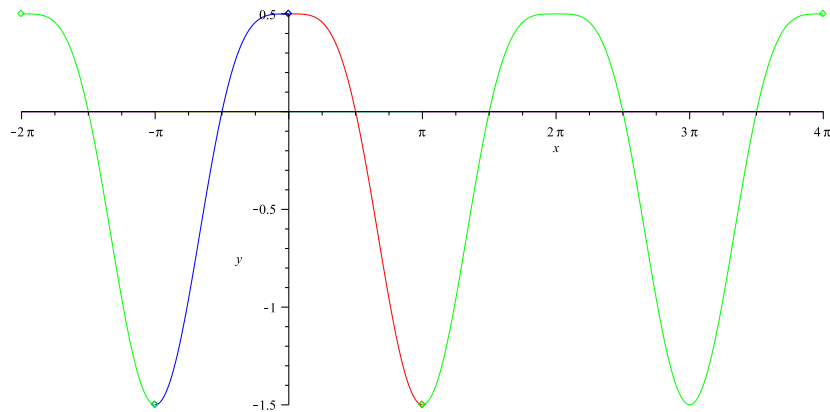
Решаваме уравнението $2u^2 - u - 1 = 0$ и получаваме $u_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{4}$. Следователно критични точки за f'' са решенията на уравненията $\cos x = 1$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$. Намираме $x_1 = 0 \in [0, \pi]$

и $x_2 = \frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$. Следователно $f''(x) > 0$ за $x \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ и $f''(x) < 0$ за $x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Можем да попълним таблицата

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	
f	$\frac{1}{2}$			$-\frac{3}{2}$
f'	—			
f''		0		

Изчертаваме графиката в интервала $[0, \pi]$ (Фиг. 128 (червено)). След това използваме четността и я продължаваме в интервала $[-\pi, 0]$ (синьо). Накрая използваме периодичността, за да я изчертаем в по голям интервал (зелено).



Фигура 128: Графика на функцията $f(x) = \cos x - \frac{\cos^2 x}{2}$

Пример 7.63 Да се построи графиката на функцията

$$f(x) = (x+1)(x-1)^3.$$

1) ДО = $(-\infty, +\infty)$.

2) Функцията не е нито четна нито нечетна.

3) Функцията не е периодична.

4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+1)(x-1)^3 = +\infty$.

5) От границата $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)(x-1)^3}{x} = \pm\infty$ следва, че f няма наклонени асимптоти.

7) $f'(x) = 3(x-1)^2(x+1) + (x-1)^3 = 2(2x+1)(x-1)^2$. Критични точки са $x = 1$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Намираме $f'(x) > 0$ за всяко $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ и следователно f е растяща в интервала $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Намираме $f'(x) < 0$ за всяко $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ и следователно f е намаляваща в интервала $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$.

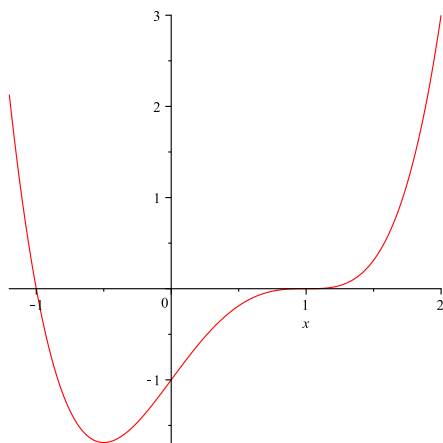
7) От растенето и намаляването на f следва, че точката $x = -\frac{1}{2}$ е точка на локален минимум.

8) $f''(x) = 6(x-1)(x+1) + 3(x-1)^2 + 6(x-1)^2 = 12x(x-1)$. Критични точки са $x = 0$ и $x = 1$. Намираме $f''(x) > 0$ за всяко $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ и следователно f изпъкнала в интервала $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Намираме $f''(x) < 0$ за всяко $x \in (0, 1)$ и следователно f е вдлъбната в интервала $(0, 1)$.

Можем да попълним таблицата

Изчертаваме графиката на функцията (Фиг. 129).

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
f	$+\infty$	$\frac{27}{16}$			$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$
f''		$+$	0	$-$	0



Фигура 129: Графика на функцията $f(x) = (x+1)^2(x-1)^3$

Пример 7.64 Да се построи графиката на функцията

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

1) ДО $= (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2) Функцията не е нито четна, нито нечетна.

3) Функцията не е периодична.

4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty$.

5) От границите $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = -5$ получаваме, че правата $y = x - 5$ е асимптота за функцията в безкрайността.

6) $f'(x) = \frac{3(x-1)^2}{(x+1)^2} - \frac{2(x-1)^3}{(x+1)^3} = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$. Критични точки са $x = 1$ и $x = -5$.

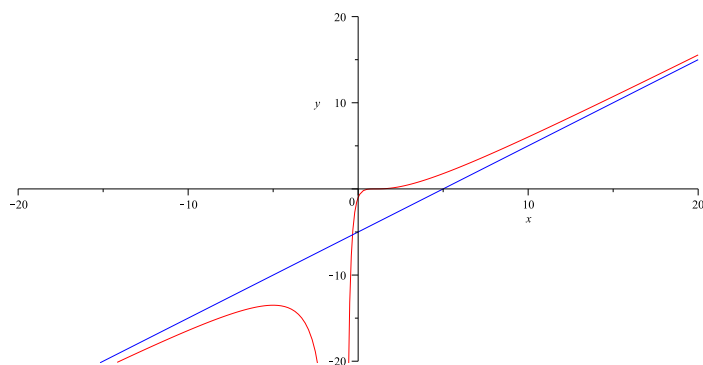
Намираме $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ и следователно f е растяща в интервала $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$. Намираме $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (-5, -1)$ и следователно f е намаляваща в интервала $(-5, -1)$.

7) От растенето и намаляването на f получаваме, че точката $x = -5$ е точка на локален максимум със стойност 13,5. Точката $x = 1$ е критична точка за f , но f' не си сменя знака и следователно тя не е точка на локален екстремум.

8) $f''(x) = \frac{6(x-1)}{(x+1)^2} - \frac{12(x-1)^2}{(x+1)^3} + \frac{6(x-1)^3}{(x+1)^4} = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$. Намираме $f''(x) > 0$ за всяко $x \in (1, +\infty)$ и следователно f е изпъкнала в интервала $(1, +\infty)$. Намираме $f''(x) < 0$ за всяко $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ и следователно f е вдлъбната в интервала $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$.

Можем да попълним таблицата. Изчертаваме графиката на функцията (Фиг. 130).

x	$-\infty$	-5	-1	1	$+\infty$		
f	$-\infty$	$-\frac{27}{2}$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		
f'	$+$	0	$-$	$+$	0	$+$	
f''		\cap	$-$	\cap	0	\cup	$+$



Фигура 130: Графиката на функцията $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

Пример 7.65 Да се построи графиката на функцията

$$f(x) = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg}(x).$$

1) ДО = $(-\infty, +\infty)$.

2) Функцията е нечетна.

3) Функцията не е периодична.

4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{2} - \operatorname{arctg}(x) \right) = \pm\infty$.

5) От границите $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \mp \frac{\pi}{2}$ получаваме, че правата $y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}$ е асимптота за функцията в $+\infty$, а правата $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$ е асимптота за функцията в $-\infty$.

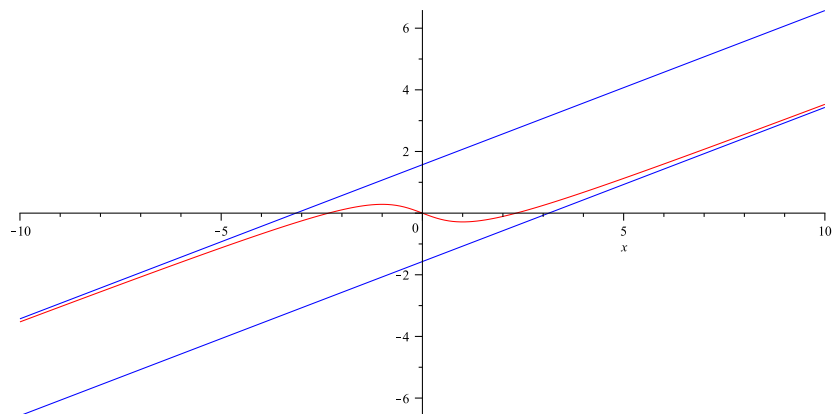
6) $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{2(x^2+1)}$. Критични точки са $x = \pm 1$. Намираме $f'(x) > 0$ за всяко $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ и следователно f е растяща в интервала $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Намираме $f'(x) < 0$ за всяко $x \in (-1, 1)$ и следователно f е намаляваща в интервала $(-1, 1)$.

7) От растенето и намаляването на f получаваме, че точката $x = -1$ е точка на локален максимум със стойност $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$. Точката $x = 1$ е точка на локален минимум със стойност $-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

8) $f''(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Намираме $f''(x) > 0$ за всяко $x > 0$ и следователно f е изпъкнала в интервала $(0, +\infty)$. Намираме $f''(x) < 0$ за всяко $x < 0$ и следователно f е вдлъбната в интервала $(-\infty, 0)$.

Можем да попълним таблицата Изчертаваме графиката на функцията Фиг. (131).

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	$-\infty$	$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$		$-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f''		-	0	+	



Фигура 131: Графика на функцията $f(x) = \frac{x}{2} - \arctg(x)$

ЗАДАЧИ:

1) Начертайте графиката на функцията f :

а) $f(x) = 3x - x^3$; б) $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2 + 1$; в) $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$;

г) $f(x) = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$; д) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$; е) $f(x) = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}$;

ж) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$; з) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 + 1}$; и) $f(x) = (x - 3)\sqrt{x}$;

й) $f(x) = \sin x + \frac{\sin(3x)}{3}$; к) $f(x) = \sin x + \cos^2 x$; л) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

м) $f(x) = x + e^{-x}$; н) $f(x) = xe^{-x^2}$; о) $f(x) = e^{-2x} \sin^2 x$;

п) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; р) $f(x) = x \arctg x$; с) $f(x) = x \arcsin \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right)$;